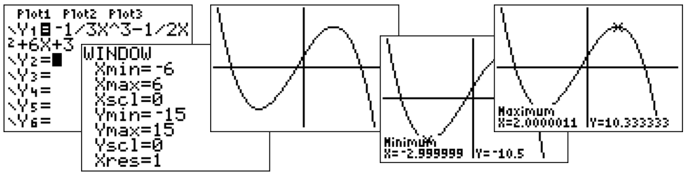
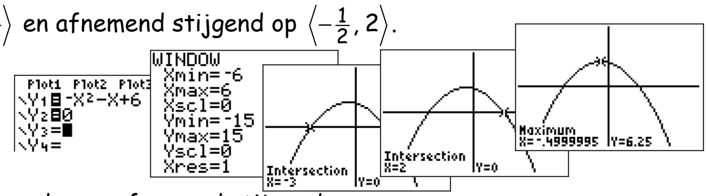
1a Maak een schets van de plot hiernaast.



1b Minimum (minimum) $\Rightarrow x = -3$ en $y = -10\frac{1}{2}$.
Maximum (maximum) $\Rightarrow x = 2$ en $y = 10\frac{1}{3}$.
Dalend op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ en $\langle 2, \rightarrow \rangle$.
Stijgend op $\langle -3, 2 \rangle$; toenemend stijgend op $\langle -3, -\frac{1}{2} \rangle$ en afnemend stijgend op $\langle -\frac{1}{2}, 2 \rangle$.

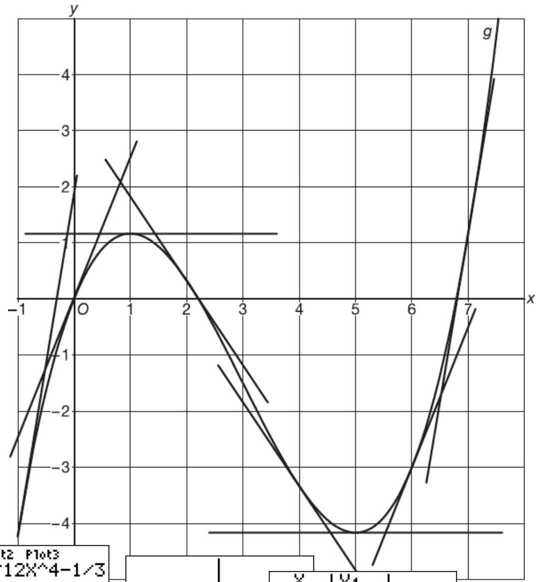
1c $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + 3 \Rightarrow f'(x) = -x^2 - x + 6$.
Maak een schets van de grafiek hiernaast.



1d $x_P = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$.

1e Bij $x = x_P$ gaat de grafiek over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

2a Zie de figuur hiernaast.



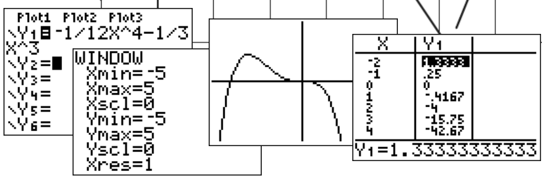
2b Raken aan de bovenkant (raaklijnen rusten op de grafiek) voor $x < 3$.

2c De overgang (van rusten op naar hangen onder) vindt plaats in $(3, -1\frac{1}{2})$.

2d .... **onder**kant. .... **boven**kant.

3 Bij $(-1, \ln(\sqrt{2}))$ $(x = -1)$ gaat de grafiek van het voorbeeld op blz. 38 over van toenemend dalend naar afnemend dalend.
Bij $(1, \ln(\sqrt{2}))$ $(x = 1)$ gaat de grafiek van het voorbeeld op blz. 38 over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

4a $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 \Rightarrow f''(x) = -x^2 - 2x$.
$f''(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(-x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$.
$f(0) = -\frac{1}{12} \cdot 0^4 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = 0$ en
$f(-2) = -\frac{1}{12} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 = -\frac{16}{12} + \frac{8}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.
De buigpunten zijn $(0, 0)$ en $(-2, 1\frac{1}{3})$.



4b $f'(0) = -\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 = 0 \Rightarrow$ de raaklijn in $(0,0)$ is horizontaal.

5 $f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = (1+x)e^x \Rightarrow f''(x) = 1 \cdot e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$.
$f''(x) = 0 \Rightarrow (2+x)e^x = 0 \Rightarrow 2 + x = 0 \Rightarrow x = -2$.
$f(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \Rightarrow$ buigpunt $(-2, -\frac{2}{e^2})$ en $rc_{\text{buigraaklijn}} = f'(-2) = (1-2)e^{-2} = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{buigraaklijn } k\text{: } y = -\frac{1}{e^2}x + b \\ \text{door buigpunt } (-2, -\frac{2}{e^2})\end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2} \cdot -2 + b \Rightarrow -\frac{4}{e^2} = b.$$
Dus buigraaklijn k: $y = -\frac{1}{e^2}x - \frac{4}{e^2}$.

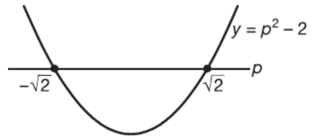
6a $f_5(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x - 5 \Rightarrow f_5'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5 \Rightarrow f_5''(x) = 3x^2 - 12x + 10$.
$f_5''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 10 = 0$ met $D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 144 - 120 = 24 > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$.
$f_5''(x) = 0$ heeft dus twee verschillende oplossingen (enkeltellend) $\Rightarrow$ twee buigpunten.

6b $f_6(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x - 5 \Rightarrow f_6'(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 \Rightarrow f_6''(x) = 3x^2 - 12x + 12$.
$f_6''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0$ met $D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 - 144 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ $(= -\frac{-12}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2)$.
$f_6''(x) = 0$ heeft één oplossing (dubbeltellend $\Rightarrow f''$ wisselt niet van teken) $\Rightarrow$ geen buigpunt (zie een plot van f_6 rond $x = 2$).

UITLEG: De grafiek van $f''(x) = 3x^2 - 12x + 12$ is een bergparabool, want de 3 voor x^2 is positief. Omdat $D = 0$ heeft f'' één (dubbeltellend) nulpunt $\Rightarrow f''$ wisselt niet van teken $\Rightarrow f'$ geen extreem $\Rightarrow f$ geen buigpunt.

6c $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + 5 \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$.
$f''(x) = 0 \Rightarrow 12ax^2 + 6bx + 2c = 0$ met als mogelijkheden:
- $D < 0 \Rightarrow$ geen $x \Rightarrow f''(x) = 0$ heeft geen oplossing $\Rightarrow$ geen buigpunt.
- $D = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ heeft één oplossing (dubbeltellend $\Rightarrow f''$ wisselt niet van teken) $\Rightarrow$ geen buigpunt.
- $D > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f''(x) = 0$ heeft dus twee verschillende oplossingen (enkeltellend) $\Rightarrow$ twee buigpunten.

7 $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10 \Rightarrow f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + \frac{3}{2}x \Rightarrow f_p''(x) = 12x^2 + 6px + \frac{3}{2}$.



$f_p''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 6px + \frac{3}{2} = 0$ met $D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{3}{2} = 36p^2 - 72$.

Geen buigpunten $\Rightarrow D \le 0 \Rightarrow 36p^2 - 72 \le 0 \Rightarrow p^2 - 2 \le 0 \Rightarrow p^2 \le 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \le p \le \sqrt{2}$.

8a $f(x) = \frac{5 + 10\ln(x)}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot \frac{10}{x} - (5 + 10\ln(x)) \cdot 1}{x^2} = \frac{10 - 5 - 10\ln(x)}{x^2} = \frac{5 - 10\ln(x)}{x^2}$.

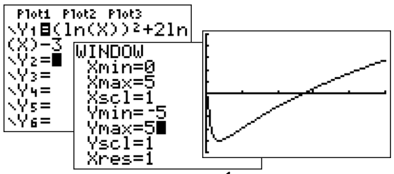
$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5 - 10\ln(x)}{x^2} = 0$ (teller = 0) $\Rightarrow 5 - 10\ln(x) = 0 \Rightarrow 10\ln(x) = 5 \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Maximum (zie figuur 13.3): $f(\sqrt{e}) = \frac{5 + 10\ln(e^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{e}} = \frac{5 + 10 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{e}} = \frac{10}{\sqrt{e}} \Rightarrow B_f = \langle \leftarrow, \frac{10}{\sqrt{e}}]$. (de y-as ($x = 0$) is verticale asymptoot)

8b $f'(x) = \frac{5 - 10\ln(x)}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{-10}{x} - (5 - 10\ln(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-10x - 10x + 20x\ln(x)}{x^4} = \frac{20x\ln(x) - 20x}{x^4} = \frac{20\ln(x) - 20}{x^3}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{20\ln(x) - 20}{x^3} = 0$ (teller = 0) $\Rightarrow 20\ln(x) = 20 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e$.

$f(e) = \frac{5 + 10\ln(e)}{e} = \frac{5 + 10}{e} = \frac{15}{e}$. Dus buigpunt $(e, \frac{15}{e})$.



9a $f(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3 \Rightarrow f'(x) = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln(x) + 1)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x}(\ln(x) + 1) = 0$ (teller = 0) $\Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Minimum (zie plot): $f(\frac{1}{e}) = (\ln(e^{-1}))^2 + 2\ln(e^{-1}) - 3 = (-1)^2 + 2 \cdot -1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow$ Top $(\frac{1}{e}, -4)$.

9b $f'(x) = \frac{2}{x}(\ln(x) + 1) = 2 \cdot x^{-1} \cdot (\ln(x) + 1) \Rightarrow f''(x) = -2x^{-2} \cdot (\ln(x) + 1) + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2} \cdot (-\ln(x) - 1 + 1) = \frac{-2\ln(x)}{x^2}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2\ln(x)}{x^2} = 0$ (teller = 0) $\Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$.

$f(1) = (\ln(1))^2 + 2\ln(1) - 3 = -3 \Rightarrow$ buigpunt $(1, -3)$ en $rc_{\text{buigraaklijn}} = f'(1) = \frac{2}{1}(\ln(1) + 1) = 2 \cdot (0 + 1) = 2$.

$\left.\begin{array}{l}\text{buigraaklijn: } y = 2x + b \\ \text{door buigpunt } (1, -3)\end{array}\right\} \Rightarrow -3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow -5 = b$. Dus buigraaklijn: $y = 2x - 5$.

9c $F(x) = x\ln^2(x) - 3x \Rightarrow F'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 3 = \ln^2(x) + 2\ln(x) - 3 = f(x)$.

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln^2(x) + 2\ln(x) - 3 = 0$ (stel $\ln(x) = t$) $\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 1) = 0 \Rightarrow$

$t = \ln(x) = -3 \vee t = \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e^{-3} \vee x = e^1 = e$.

$O(V) = \int_{e^{-3}}^{e} -f(x)\,dx = \left[-x\ln^2(x) + 3x\right]_{e^{-3}}^{e} = -e \cdot 1^2 + 3 \cdot e - (-e^{-3} \cdot (-3)^2 + 3e^{-3}) = 2e - (-9e^{-3} + 3e^{-3}) = 2e + \frac{6}{e^3}$.

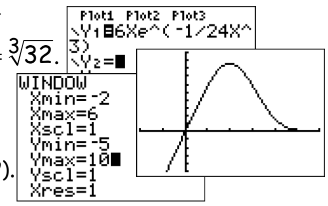
10a $f(x) = 6xe^{-\frac{1}{24}x^3} \Rightarrow f'(x) = 6 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} + 6x \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} \cdot -\frac{1}{8}x^2 = (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}x^3 = 6 \Rightarrow x^3 = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8 = 2^3 \Rightarrow x_{\text{top}} = 2$.

10b $f'(x) = (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} \Rightarrow f''(x) = -\frac{9}{4}x^2 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} + (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} \cdot -\frac{1}{8}x^2 = (-3x^2 + \frac{3}{32}x^5) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow (-3x^2 + \frac{3}{32}x^5) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} = 0 \Rightarrow -3x^2 + \frac{3}{32}x^5 = 0 \Rightarrow 3x^2(-1 + \frac{1}{32}x^3) = 0 \Rightarrow$

$x^2 = 0 \vee \frac{1}{32}x^3 = 1 \Rightarrow x \cdot x = 0$ ($x = 0$ dubbeltellend $\Rightarrow$ vold. niet) $\vee x^3 = 32 \Rightarrow x_{\text{buigpunt}} = \sqrt[3]{32}$.



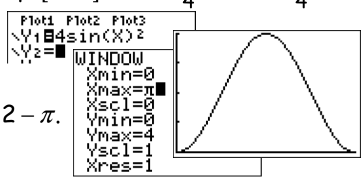
10c $f'(0) = 6 \cdot e^0 = 6 \Rightarrow k$: $y = 6x$ is de raaklijn door $O(0, 0)$.

Lees nu in een plot af: $f(x) = ax$ (f snijden met een lijn door O) heeft één oplossing voor $a \le 0$ (een horizontale of dalende lijn door O snijdt f alleen in O) $\vee$ $a = 6$ (de raaklijn in O).

11 $f(x) = 4\sin^2(x) \Rightarrow f'(x) = 8\sin(x) \cdot \cos(x) = 4\sin(2x) \Rightarrow f''(x) = 4\cos(2x) \cdot 2 = 8\cos(2x)$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 8\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$. Nu x op $[0, \pi] \Rightarrow x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi$.

$x = \frac{1}{4}\pi \Rightarrow y = f(\frac{1}{4}\pi) = 4\sin^2(\frac{1}{4}\pi) = 4 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 2 \Rightarrow$ buigpunt: $(\frac{1}{4}\pi, 2)$.



Buigraaklijn k: $y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{4}\pi) = 4\sin(2 \cdot \frac{1}{4}\pi) = 4\sin(\frac{1}{2}\pi) = 4 \cdot 1 = 4$.

k: $y = 4x + b$ door $(\frac{1}{4}\pi, 2) \Rightarrow 2 = 4 \cdot \frac{1}{4}\pi + b \Rightarrow 2 = \pi + b \Rightarrow 2 - \pi = b$. Dus k: $y = 4x + 2 - \pi$.

$x = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow y = f(\frac{3}{4}\pi) = 4\sin^2(\frac{3}{4}\pi) = 4 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 2 \Rightarrow$ buigpunt: $(\frac{3}{4}\pi, 2)$.

Buigraaklijn l: $y = ax + b$ met $a = f'(\frac{3}{4}\pi) = 4\sin(2 \cdot \frac{3}{4}\pi) = 4\sin(\frac{3}{2}\pi) = 4 \cdot -1 = -4$.

l: $y = -4x + b$ door $(\frac{3}{4}\pi, 2) \Rightarrow 2 = -4 \cdot \frac{3}{4}\pi + b \Rightarrow 2 = -3\pi + b \Rightarrow 2 + 3\pi = b$. Dus l: $y = -4x + 2 + 3\pi$.

12a $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2\cdot a}$ en $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2\cdot a}$. Dus $x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$

12b $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b.$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=0 \Rightarrow 6ax+2b=0 \Rightarrow 6ax=-2b \Rightarrow x_C=\frac{-2b}{6a}=-\frac{b}{3a} \\ f'(x)=0 \Rightarrow 3ax^2+2bx+c=0 \Rightarrow x_A+x_B=-\frac{2b}{3a} \text{ (zie 12a)} \end{array}\right\} \Rightarrow x_C=\frac{x_A+x_B}{2}.$$

Opmerking: Omdat gegeven is dat de grafiek van f twee toppen heeft, heeft $f'(x)=0$ twee oplossingen.
Dus de discriminant D van $f'(x)=0$ kan niet kleiner dan of gelijk aan nul zijn.

12c $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (met $a\neq 0$) $\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b.$

$f''(x)=0 \Rightarrow 6ax+2b=0 \Rightarrow 6ax=-2b \Rightarrow x=\frac{-2b}{6a}=-\frac{b}{3a}.$

Dus $f''(x)=0$ heeft precies één oplossing want $a\neq 0 \Rightarrow f'(x)$ heeft precies één extreem.
Dus de grafiek van f heeft precies één buigpunt. (opmerking: als $a=0$ dan is f geen derdegraadsfunctie)

13a $C(t)=-0{,}0004t^3+0{,}04t^2+0{,}28t \Rightarrow C'(t)=\frac{dC}{dt}=-0{,}0012t^2+0{,}08t+0{,}28.$

13b $C'(t)=\frac{dC}{dt}$ is de snelheid in ml per liter per minuut (ml/ltr/min) waarmee de hoeveelheid C verandert.

13c $C'(t)=\frac{dC}{dt}=-0{,}0012t^2+0{,}08t+0{,}28$ maximaal (optie maximum loslaten op de formule van $C'(t)$ of) $\Rightarrow$

$C''(t)=-0{,}0024t+0{,}08=0 \Rightarrow 0{,}08=0{,}0024t \Rightarrow t=\frac{0{,}08}{0{,}0024}=\frac{800}{24}=\frac{100}{3}\approx 33{,}3$ (min).

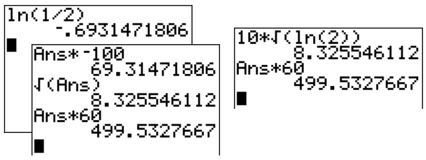
14 $T(t)=20+80e^{-0{,}2t} \Rightarrow T'(t)=\frac{dT}{dt}=80e^{-0{,}2t}\cdot -0{,}2=-16e^{-0{,}2t}<0$ (een e-macht is steeds positief).

$T'(t)=\frac{dT}{dt}=-16e^{-0{,}2t} \Rightarrow T''(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\right)=-16e^{-0{,}2t}\cdot -0{,}2=3{,}2e^{-0{,}2t}>0$ (een e-macht is steeds positief).

$T'(t)=\frac{dT}{dt}<0$ ($\Rightarrow T$ dalend) en $T''(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\right)>0$ ($\Rightarrow T'$ stijgend) $\Rightarrow$ daling wordt minder $\Rightarrow T$ afnemend dalend.
Het afkoelingsproces verloopt dus steeds langzamer.

15a $V(t)=100e^{-0{,}01t^2}=50$ (intersect of) $\Rightarrow e^{-0{,}01t^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow -0{,}01t^2=\ln(\frac{1}{2}) \Rightarrow$

$t^2=-100\cdot\ln(2^{-1})=100\cdot\ln(2) \Rightarrow t=\sqrt{100\cdot\ln(2)}=10\cdot\sqrt{\ln(2)}\approx 8{,}33$ (min).
(negatieve waarden voor t voldoen niet, omdat het kantelen begint bij $t=0$)
Na ongeveer 500 seconden is de helft weggestroomd.



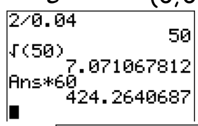
15b De uitstroomsnelheid $V'(t)=\frac{dV}{dt}$ maximaal $\Rightarrow V''(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right)=0.$

$V(t)=100e^{-0{,}01t^2} \Rightarrow \frac{dV}{dt}=100e^{-0{,}01t^2}\cdot -0{,}02t=-2t\cdot e^{-0{,}01t^2} \Rightarrow$

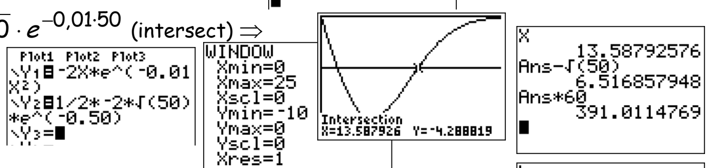
$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right)=-2\cdot e^{-0{,}01t^2}+-2t\cdot e^{-0{,}01t^2}\cdot -0{,}02t=-2\cdot e^{-0{,}01t^2}+0{,}04t^2\cdot e^{-0{,}01t^2}=e^{-0{,}01t^2}\cdot(0{,}04t^2-2).$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right)=0 \Rightarrow e^{-0{,}01t^2}\cdot(0{,}04t^2-2)=0$ (een e-macht is steeds positief) $\Rightarrow$

$0{,}04t^2=2 \Rightarrow t^2=50$ ($t>0$) $\Rightarrow t=\sqrt{50}$ (min). Dit na (ongeveer) 424 seconden.



15c De uitstroomsnelheid $\frac{dV}{dt}=-2t\cdot e^{-0{,}01t^2}=\frac{1}{2}\cdot -2\cdot\sqrt{50}\cdot e^{-0{,}01\cdot 50}$ (intersect) $\Rightarrow$
(de waarde vóór $t=\sqrt{50}$ voldoet niet) $t\approx 13{,}59$ (min).
Dus na (ongeveer) $(Ans-\sqrt{50})\cdot 60\approx 391$ seconden.

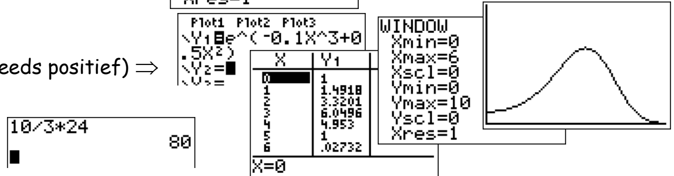


16a $N=e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2} \Rightarrow \frac{dN}{dt}=e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2}\cdot(-0{,}3t^2+t).$

$\frac{dN}{dt}=0 \Rightarrow e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2}\cdot(-0{,}3t^2+t)=0$ (een e-macht is steeds positief) $\Rightarrow$

$-0{,}3t^2+t=0 \Rightarrow t(-0{,}3t+1)=0 \Rightarrow t=0 \vee t=\frac{-1}{-0{,}3}=\frac{10}{3}.$

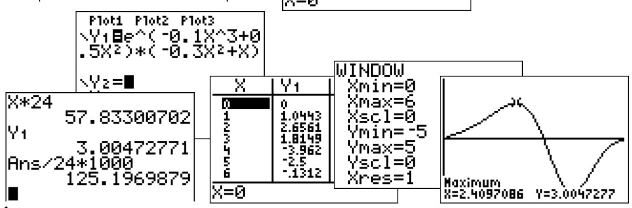
Het maximum (zie een plot) bij $t=\frac{10}{3}$ (dag) $\Rightarrow$ na 80 uur.



16b $\frac{dN}{dt}=e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2}\cdot(-0{,}3t^2+t)$ (optie maximum) $\Rightarrow$

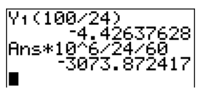
$t\approx 2{,}41$ (dagen) en $\frac{dN}{dt}_{max}\approx 3{,}00$ (miljard/dag).

Dus na (ongeveer) 58 uur is de groeisnelheid maximaal.
De snelheid ongeveer 125 miljoen bacteriën/uur.



16c $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=\frac{100}{24}}=\left[e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2}\cdot(-0{,}3t^2+t)\right]_{t=\frac{100}{24}}\approx -4{,}426...$ (miljard bacteriën/dag)

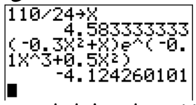
Dit is een afname van $\frac{-Ans\cdot 1000000}{24\cdot 60}\approx 3074$ duizend bacteriën/min.

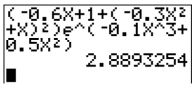


16d $\frac{dN}{dt}=(-0{,}3t^2+t)\cdot e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dN}{dt}\right)=(-0{,}6t+1)\cdot e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2}+(-0{,}3t^2+t)\cdot e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2}\cdot(-0{,}3t^2+t).$

$=(-0{,}6t+1)\cdot e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2}+(-0{,}3t^2+t)^2\cdot e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2}$

$=(-0{,}6t+1+(-0{,}3t^2+t)^2)\cdot e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2}$.





$\left[\frac{dN}{dt}\right]_{\frac{110}{24}}\approx -4{,}12<0 \Rightarrow$ de helling van N is negatief $\Rightarrow$ dalend

$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dN}{dt}\right)\right]_{\frac{110}{24}}\approx 2{,}89>0 \Rightarrow$ de helling stijgt $\Rightarrow$ de daling van N neemt af

$\Rightarrow$ N is afnemend dalend na 110 uur.

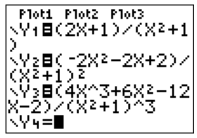
17 $f(x)=(x^2-3)(x^2-5)=x^4-8x^2+15 \Rightarrow f'(x)=4x^3-16x \Rightarrow f''(x)=12x^2-16.$

$f'(1)=4-16<0 \Rightarrow$ de helling van f is negatief $\Rightarrow$ dalend

$f''(1)=12-16<0 \Rightarrow$ de helling daalt $\Rightarrow$ de daling van f neemt toe

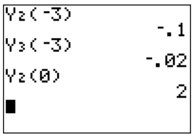
$\Rightarrow$ f is toenemend dalend voor $x=1$.

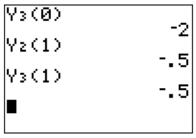
18 $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x^2+1)\cdot 2-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2-2x+2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$



$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2\cdot(-4x-2)-(-2x^2-2x+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)\cdot(-4x-2)-(-2x^2-2x+2)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+1)^3}$

$=\frac{-4x^3-2x^2-4x-2+8x^3+8x^2-8x}{(x^2+1)^3}=\frac{4x^3+6x^2-12x-2}{(x^2+1)^3}.$





$f'(-3)<0$ én $f''(-3)<0 \Rightarrow$ toenemend dalend voor $x_A=-3$.

$f'(0)>0$ én $f''(0)<0 \Rightarrow$ afnemend stijgend voor $x_B=0$.

$f'(1)<0$ én $f''(1)<0 \Rightarrow$ toenemend dalend voor $x_C=1$.

19a $s(1)=0{,}2\cdot 1^2+0{,}1\cdot 1=0{,}2+0{,}1=0{,}3$ (m) en $s(3)=0{,}2\cdot 3^2+0{,}1\cdot 3=1{,}8+0{,}3=2{,}1$ (m).

Op het interval $[1,3]$ is $v_{gem}=\frac{s(3)-(s(1)}{3-1}=\frac{2{,}1-0{,}3}{2}=\frac{1{,}8}{2}=0{,}9$ (m/s).

19b $s=0{,}2t^2+0{,}1t \Rightarrow v=\frac{ds}{dt}=0{,}4t+0{,}1.$

19c $v(4)=0{,}4\cdot 4+0{,}1=1{,}6+0{,}1=1{,}7$ (m/s) en $v(5)=0{,}4\cdot 5+0{,}1=2+0{,}1=2{,}1$ (m/s).

19d Op het interval $[4,5]$ is de snelheid met $v(5)-v(4)=2{,}1-1{,}7=0{,}4$ m/s toegenomen.

Op het interval $[5,6]$ neemt de snelheid toe met $v(6)-v(5)=0{,}4\cdot 6+0{,}1-2{,}1=2{,}5-2{,}1=0{,}4$ m/s.

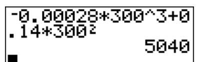
19e $v(t+1)-v(t)=0{,}4\cdot(t+1)+0{,}1-(0{,}4\cdot t+0{,}1)=0{,}4t+0{,}4+0{,}1-0{,}4t-0{,}1=0{,}4.$

Op elk interval $[t,t+1]$ neemt de snelheid toe met 0,4 m/s.

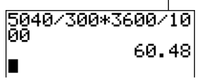
20 Bij toenemende snelheid is de versnelling positief en bij afnemende snelheid is de versnelling negatief, dus de snelheid zal maximaal zijn als de versnelling nul is.

21a $s(0)=-0{,}00028\cdot 0^3+0{,}14\cdot 0^2=0$ (m) en $s(300)=-0{,}00028\cdot 300^3+0{,}14\cdot 300^2=5\,040$ (m).

In de eerste 300 seconden (5 minuten) wordt $s(300)-s(0)=5\,040$ meter afgelegd.

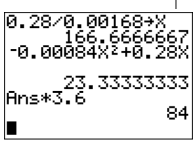


21b $\frac{5040}{300}$ m/s $=\frac{5040}{300}\times 3600$ m/u $=\frac{5040}{300}\times\frac{3600}{1000}$ km/u $=\frac{5040}{300}\cdot 3{,}6$ km/u $=60$ km/u.



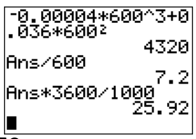
21c De snelheid is maximaal op $t=\frac{-0{,}28}{-0{,}00168}=166{,}66...$ (s).

v_{max} (in km/u) $=v(\text{Ans})\times 3{,}6=84$ (km/u).



22a $s(0)=-0{,}00004\cdot 0^3+0{,}036\cdot 0^2=0$ (m) en $s(600)=-0{,}00004\cdot 600^3+0{,}036\cdot 600^2=4\,320$ (m).

De gemiddelde snelheid over de gehele fietstocht is $\frac{4320}{600}=7{,}2$ m/s ≈ 26 km/u.

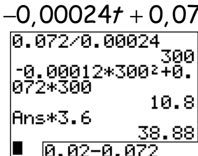


22b $s(t)=-0{,}00004t^3+0{,}036t^2 \Rightarrow v(t)=\frac{ds}{dt}=-0{,}00012t^2+0{,}072t \Rightarrow a(t)=\frac{dv}{dt}=-0{,}00024t+0{,}072.$

$a(t)>0 \Rightarrow -0{,}00024t+0{,}072>0 \Rightarrow -0{,}00024t>-0{,}072 \Rightarrow t<300.$

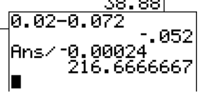
Voor $t<300$ neemt de snelheid $v(t)$ toe.

22c $v_{max}=v(300)=-0{,}00012\cdot 300^2+0{,}072\cdot 300=10{,}8$ m/s ≈ 39 km/u.



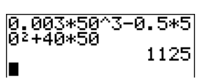
22d $a(t)<0{,}02 \Rightarrow -0{,}00024t+0{,}072<0{,}02 \Rightarrow -0{,}00024t<-0{,}052 \Rightarrow t>216{,}7.$

Vanaf $t\approx 216{,}7$ is de versnelling $a(t)$ minder dan 0,02 m/s^2.

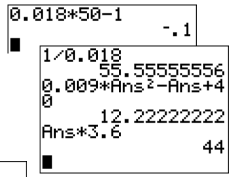


23a $s(0)=0{,}003\cdot 0^3-0{,}5\cdot 0^2+40\cdot 0=0$ (m) en $s(50)=0{,}003\cdot 50^3-0{,}5\cdot 50^2+40\cdot 50=1125$ (m).

In de eerste 50 seconden wordt $s(50)-s(0)=1125$ meter afgelegd.

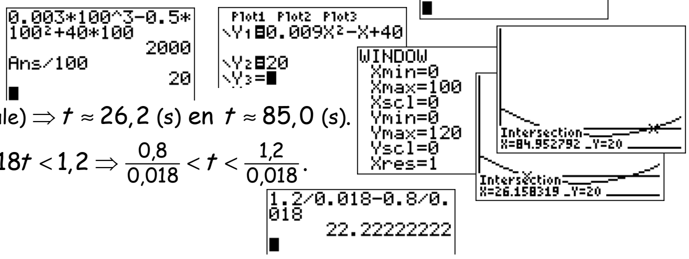


23b $s(t) = 0{,}003t^3 - 0{,}5t^2 + 40t \Rightarrow v(t) = \frac{ds}{dt} = 0{,}009t^2 - t + 40 \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = 0{,}018t - 1.$
$a(t)$ is een lineaire functie met $a(0) = -1$ en $a(50) = -0{,}1 \Rightarrow$ de versnelling is gedurende de eerste 50 seconden steeds negatief $\Rightarrow$ de snelheid neemt voortdurend af.



23c $v(t)$ minimaal $\Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow 0{,}018t - 1 = 0 \Rightarrow 0{,}018t = 1 \Rightarrow t \approx 55{,}6$ (sec).
$v_{min} \cdot 3{,}6$ (in km/u) $= v(\text{Ans}) \cdot 3{,}6 = (0{,}009 \cdot \text{Ans}^2 - \text{Ans} + 40) \cdot 3{,}6 = 44$ km/u.

23d $s(100) = 0{,}003 \cdot 100^3 - 0{,}5 \cdot 100^2 + 40 \cdot 100 = 2\,000$ (m).
$v_{gem} = \frac{s(100) - s(0)}{100 - 0} = \frac{2000 - 0}{100} = 20$ (m/s).
$v(t) = 20 \Rightarrow 0{,}009t^2 - t + 40 = 20$ (intersect of *abc*-formule) $\Rightarrow t \approx 26{,}2$ (s) en $t \approx 85{,}0$ (s).



23e $-0{,}2 < a(t) < 0{,}2 \Rightarrow -0{,}2 < 0{,}018t - 1 < 0{,}2 \Rightarrow 0{,}8 < 0{,}018t < 1{,}2 \Rightarrow \frac{0{,}8}{0{,}018} < t < \frac{1{,}2}{0{,}018}.$
Dus gedurende $\frac{1{,}2}{0{,}018} - \frac{0{,}8}{0{,}018} \approx 22$ seconden.

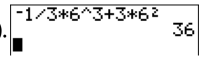
24a $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2 \Rightarrow v(t) = \frac{ds}{dt} = -t^2 + 12t \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = -2t + 12.$

24b Primitiveren van $a(t) = -3t + 10$ geeft $v(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 10t + c$. De constante c is nog onbekend.

25ab $O(W) = \int_0^{10} a(t)\,dt = \left[v(t)\right]_0^{10} = v(10) - v(0) = v(10) - 0 = v(10).$

25c $O(W) = \int_0^{10} a(t)\,dt = \left[v(t)\right]_0^{10} = v(10) - v(0) = v(10) - 2 \neq v(10).$

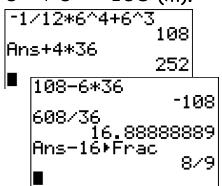
26a $\left.\begin{array}{l} a(t) = -t^2 + 6t \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + c \\ \text{met } v(0) = 0 \text{ (gegeven)} \end{array}\right\} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2.$ Dus $v(6) = -\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 = 36$ (m/s).



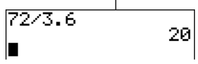
26b $\left.\begin{array}{l} v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + c \Rightarrow s(t) = -\frac{1}{12}t^4 + t^3 + c \\ \text{met } s(0) = 0 \text{ (gegeven)} \end{array}\right\} \Rightarrow s(t) = -\frac{1}{12}t^4 + t^3.$ Dus $s(6) = -\frac{1}{12} \cdot 6^4 + 6^3 = 108$ (m).

26c $s(10) = s(6) + 4 \cdot v(6) = 108 + 4 \cdot 36 = 252$ (m).

26b Voor $t \geq 6$ geldt: $s(t) = s(6) + (t - 6) \cdot v(6)$.
$s(t) = 500 \Rightarrow 500 = 108 + (t - 6) \cdot 36 \Rightarrow 500 = 36t - 108 \Rightarrow 608 = 36t \Rightarrow t = \frac{608}{36} = 16\frac{8}{9}.$

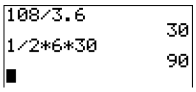


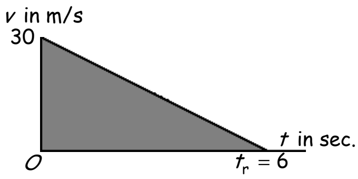
27a $v(0) = 72 : 3{,}6 = 20$ (m/s). Tevens neemt de snelheid lineair af, want de versnelling is constant.



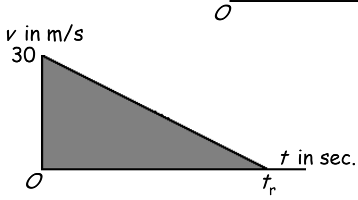
27b $\left.\begin{array}{l} O = \int_0^{t_r} v(t)\,dt = \left[s(t)\right]_0^{t_r} = s(t_r) - s(0) = s(t_r) - 0 = s(t_r) = 30 \\ O = \frac{1}{2} \cdot t_r \cdot 20 \text{ (oppervlakte van de blauwe driehoek)} = 10 \cdot t_r \end{array}\right\} \Rightarrow 10 \cdot t_r = 30 \Rightarrow t_r = 3$ (s).

28a $v(0) = 108 : 3{,}6 = 30$ (m/s).
$\left.\begin{array}{l} O = \int_0^{t_r=6} v(t)\,dt = \left[s(t)\right]_0^6 = s(6) - s(0) = s(6) - 0 = s(6) \\ O = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 30 = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow$ remweg $s(6) = 90$ (m).

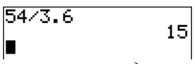




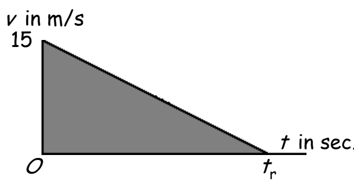
28b $\left.\begin{array}{l} O = \int_0^{t_r} v(t)\,dt = \left[s(t)\right]_0^{t_r} = s(t_r) = 60 \\ O = \frac{1}{2} \cdot t_r \cdot 30 = 15t_r \end{array}\right\} \Rightarrow 15 \cdot t_r = 60 \Rightarrow t_r = 4$ (s).



29a $v(0) = 54 : 3{,}6 = 15$ (m/s).

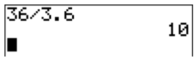


$\left.\begin{array}{l} O = \int_0^{t_r} v(t)\,dt = \left[s(t)\right]_0^{t_r} = s(t_r) = 0{,}75 \\ O = \frac{1}{2} \cdot t_r \cdot 15 = 7{,}5t_r \end{array}\right\} \Rightarrow 7{,}5 \cdot t_r = 0{,}75 \Rightarrow t_r = 0{,}1$ (s).

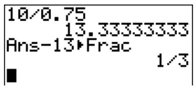


29b $a = \frac{15}{0{,}1} = 150$ (m/s²). Dus 15 keer zo groot als $g = 10$ (m/s²).

30a Voor de auto (A) geldt:
$a_A(t) = 1{,}5 \Rightarrow v_A(t) = 1{,}5t + c_1$ met $v_A(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow v_A(t) = 1{,}5t$.
$v_A(t) = 1{,}5t \Rightarrow s_A(t) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5t^2 + c_2$ met $s_A(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow s_A(t) = 0{,}75t^2$.
Voor de brommer (B) geldt: $v_B(t) = 10 \Rightarrow s_B(t) = 10t + c_3$ met $s_B(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow s_B(t) = 10t$.

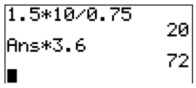


$s_A(t) = s_B(t) \Rightarrow 0{,}75t^2 = 10t \Rightarrow 0{,}75t^2 - 10t = 0 \Rightarrow t \cdot (0{,}75t - 10) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee 0{,}75t = 10 \Rightarrow t = 0 \vee t = \frac{10}{0{,}75}$.



Dus na $13\frac{1}{3}$ seconde haalt de auto de brommer weer in.

30b $v_A(13\frac{1}{3}) = 1{,}5 \cdot 13\frac{1}{3} = 20$ (m/s). Dit is een snelheid van 72 km/u.



31a k door $O(0, 0)$ en $P(p, e^p) \Rightarrow \text{rc}_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{e^p - 0}{p - 0} = \frac{e^p}{p}$.

31b $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$. Dus $\text{rc}_k = \left[f'(x)\right]_{x=p} = e^p$.

31c $\frac{e^p}{p} = e^p \Rightarrow \frac{e^p}{p} = \frac{e^p}{1} \Rightarrow p = 1$. Dus $P(1, e^1) = P(1, e)$ en $\text{rc}_k = e^1 = e$. De raaklijn door O is k: $y = ex$.

32a $$\left.\begin{array}{l} m \text{ door } O(0,0) \text{ en } P(p, f(p)) \Rightarrow \text{rc}_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{f(p) - 0}{p - 0} = \frac{f(p)}{p} \\ m \text{ raakt in } P \text{ met } x_P = p \Rightarrow \text{rc}_m = f'(p) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(p) = \frac{f(p)}{p}.$$

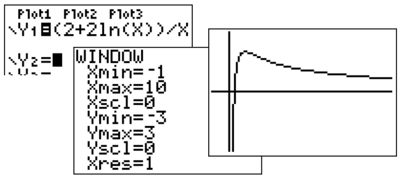
32b $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$. Dus $\text{rc}_m = f'(p) = \frac{1}{p}$. Invullen in: $f'(p) = \frac{f(p)}{p} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{\ln(p)}{p} \Rightarrow \ln(p) = 1 \Rightarrow p = e^1 = e$.
$x = p = e \Rightarrow y_P = f(p) = f(e) = \ln(e) = 1 \Rightarrow P(e, 1)$ en $\text{rc}_m = f'(p) = f'(e) = \frac{1}{e}$. Dus m: $y = \frac{1}{e}x$.

33 $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ $(x > 0)$.
Raaklijn door $A(-4, 0) \Rightarrow$ de x-coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x) - 0}{x + 4}$.
$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 0}{x + 4} \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x + 4} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = 1 \cdot (x + 4) \Rightarrow 2x = x + 4 \Rightarrow x = 4$.
$x = 4 \Rightarrow y = f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow B(4, 2)$ en $\text{rc}_k = f'(4) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$.
k: $y = \frac{1}{4}x + b$ door $B(4, 2) \Rightarrow 2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + b \Rightarrow 2 = 1 + b \Rightarrow 1 = b$. Dus k: $y = \frac{1}{4}x + 1$.

34a $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$.
Raaklijnen door $O(0, 0) \Rightarrow$ de x-coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.
$2x = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \vee x = 1$.
$x = -1 \Rightarrow \text{rc}_k = f'(-1) = 2 \cdot -1 = -2 \Rightarrow k$: $y = -2x$ en $x = 1 \Rightarrow \text{rc}_l = f'(1) = 2 \Rightarrow l$: $y = 2x$.

34b Raaklijnen door $A(1, 0) \Rightarrow$ de x-coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x) - 0}{x - 1}$.
$2x = \frac{x^2+1-0}{x-1} \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow 2x^2 - 2x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$ met $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow$
$x = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} - \frac{-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \vee x = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.
$x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{2})^2 + 1 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot -\sqrt{2} + (-\sqrt{2})^2 + 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow$ raakpunt $(1 - \sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$.
$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = (1 + \sqrt{2})^2 + 1 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow$ raakpunt $(1 + \sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2})$.

35a $f(x) = \frac{2 + 2\ln(x)}{x}$ $(x > 0) \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot \frac{2}{x} - (2 + 2\ln(x)) \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2 - 2\ln(x)}{x^2} = \frac{-2\ln(x)}{x^2}$.
$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2\ln(x)}{x^2} = 0$ (teller = 0) $\Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$.
Maximum (zie plot) $f(1) = \frac{2 + 2\ln(e^0)}{1} = \frac{2 + 0}{1} = \frac{2}{1} = 2$. Dit geeft: $\text{B}_f = \langle \leftarrow, 2]$.

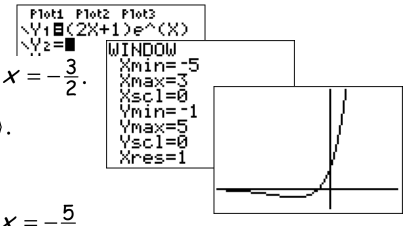


35b $f'(x) = \frac{-2\ln(x)}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{-2}{x} - -2\ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x + 4x\ln(x)}{x^4} = \frac{x \cdot (-2 + 4\ln(x))}{x^4} = \frac{-2 + 4\ln(x)}{x^3}$.
$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2 + 4\ln(x)}{x^3} = 0$ (teller = 0) $\Rightarrow -2 + 4\ln(x) = 0 \Rightarrow 4\ln(x) = 2 \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.
$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \Rightarrow f(\sqrt{e}) = \frac{2 + 2\ln(e^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{e}} = \frac{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{e}} = \frac{3}{\sqrt{e}}$. Het buigpunt is $\left(\sqrt{e}, \frac{3}{\sqrt{e}}\right)$.

35c Raaklijn door $O(0, 0) \Rightarrow$ de x-coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.
$\frac{-2\ln(x)}{x^2} = \frac{\frac{2+2\ln(x)}{x}}{x} \Rightarrow \frac{-2\ln(x)}{x^2} = \frac{2+2\ln(x)}{x^2} \Rightarrow -2\ln(x) = 2 + 2\ln(x) \Rightarrow -4\ln(x) = 2 \Rightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
$x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow rc_k = f'(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{-2\ln(e^{-\frac{1}{2}})}{(\frac{1}{\sqrt{e}})^2} = \frac{-2 \cdot -\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = 1 \cdot \frac{e}{1} = e$. Dit geeft k: $y = ex$.

35d $\frac{2+2\ln(x)}{x} = ax$ ($f(x)$ snijden met een lijn door de oorsprong).
Voor $a = e$ raakt de lijn door de oorsprong de grafiek van f (zie 35c).
Voor $0 < a < e$ snijdt de lijn door de oorsprong de grafiek van f in twee punten (zie de plot bij 35a).
(de lijn $y = ax$ door O moet stijgend zijn maar minder steil dan de raaklijn uit O) Dus het antwoord is $0 < a < e$.

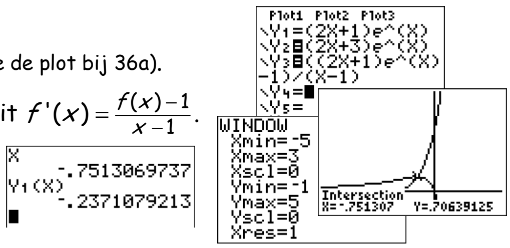
36a $f(x) = (2x+1)e^x \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x+1) \cdot e^x = (2x+3)e^x$.
$f'(x) = 0 \Rightarrow (2x+3)e^x = 0$ (e-macht is steeds positief) $\Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.
Minimum (zie plot) $f(-1\frac{1}{2}) = (-3+1)e^{-1\frac{1}{2}} = -2 \cdot \frac{1}{e^{1\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{e \cdot \sqrt{e}}$. Dus $B_f = \left[-\frac{2}{e\sqrt{e}}, \rightarrow\right\rangle$.
$f'(x) = (2x+3) \cdot e^x \Rightarrow f''(x) = 2 \cdot e^x + (2x+3) \cdot e^x = (2x+5)e^x$.
$f''(x) = 0 \Rightarrow (2x+5)e^x = 0$ (e-macht is alleen positief) $\Rightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$.
$f(-2\frac{1}{2}) = (-5+1)e^{-2\frac{1}{2}} = -4 \cdot \frac{1}{e^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{4}{e^2 \cdot \sqrt{e}}$. Het buigpunt is $(-2\frac{1}{2}, -\frac{4}{e^2\sqrt{e}})$.



36b Raaklijnen door $O(0, 0) \Rightarrow$ de x-coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.
$(2x+3)e^x = \frac{(2x+1)e^x}{x} \Rightarrow \frac{2x+3}{1} = \frac{2x+1}{x} \Rightarrow 2x^2 + 3x = 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x+1) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$.
$x = \frac{1}{2} \Rightarrow rc_k = f'(\frac{1}{2}) = 4e^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e} \Rightarrow k$: $y = 4\sqrt{e}x$ en $x = -1 \Rightarrow rc_l = f'(-1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow l$: $y = \frac{1}{e}x$.

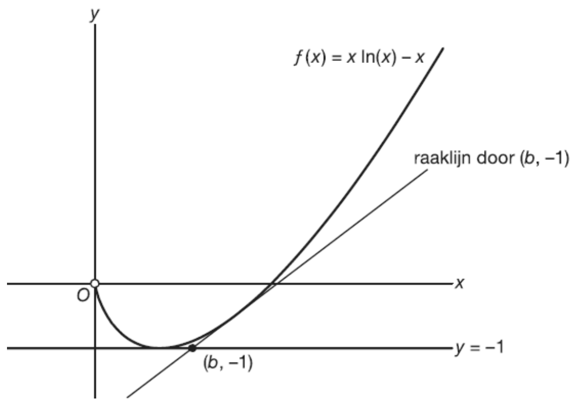
36c Voor $a = \frac{1}{e}$ en $a = 4\sqrt{e}$ is er één oplossing (zie 36b).
Voor $0 < a < \frac{1}{e}$ en $a > 4\sqrt{e}$ heeft $(2x+1)e^x = ax$ twee oplossingen (zie de plot bij 36a).

36d Raaklijnen door $A(1, 1) \Rightarrow$ de x-coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$.
$(2x+3)e^x = \frac{(2x+1)e^x - 1}{x-1}$ (intersect met de voorwaarde $x < 0$) $\Rightarrow x \approx -0{,}75$.
$x \approx -0{,}75 \Rightarrow y = f(x) \approx -0{,}24 \Rightarrow$ raakpunt $P(-0{,}75; -0{,}24)$.

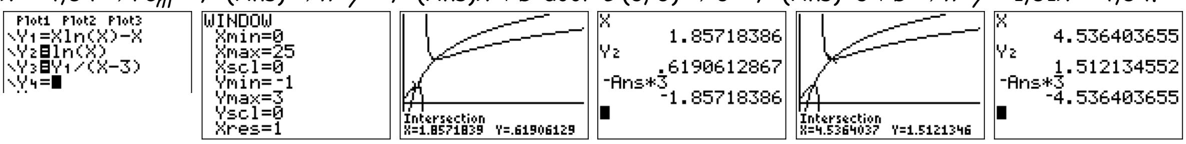


37a $f(x) = x\ln(x) - x$ (met $x > 0$ vanwege ln...) $\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.
Raaklijn door $A(0, -e^2) \Rightarrow$ de x-coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x) - -e^2}{x}$.
$\frac{\ln(x)}{1} = \frac{x\ln(x) - x + e^2}{x} \Rightarrow x\ln(x) = x\ln(x) - x + e^2 \Rightarrow x = e^2$.
$x = e^2 \Rightarrow rc_k = f'(e^2) = \ln(e^2) = 2 \Rightarrow k$: $y = 2x + b$ door $A(0, -e^2) \Rightarrow k$: $y = 2x - e^2$.

37b $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$.
$f(1) = 1 \cdot \ln(1) - 1 = 1 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow$ de top is $(1, -1)$.
Voor de raaklijn in $(1, -1)$ geldt: $rc_l = 0$ (dus $b = 1$).
Voor $b \le 1$ is er geen (stijgende) raaklijn l $(b, -1)$
aan de grafiek van f (met $0 < rc_l = f'(x) < 1$).
$f'(x) = 1 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e^1 = e$ en $y = f(e) = e \cdot \ln(e) - e = 0$.
Voor de raaklijn in $(e, 0)$ geldt: $rc_l = 1$.
De vergelijking van deze raaklijn $y = 1x - e$.
$y = x - e$ snijden met $y = -1 \Rightarrow x - e = -1 \Rightarrow x = e - 1$.
De raaklijn l door $(e-1, -1)$ aan f heeft $rc_l = 1$ (dus $b = e - 1$).
Dus $b > 1$ én (tevens) $b < e - 1 \Rightarrow 1 < b < e - 1$.



37c De x-coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x) - 0}{x - 3}$.
$\frac{\ln(x)}{1} = \frac{x\ln(x) - x}{x - 3} \Rightarrow (x-3) \cdot \ln(x) = x\ln(x) - x$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 1{,}86 \vee x \approx 4{,}54$.
$x \approx 1{,}86 \Rightarrow rc_m = f'(\text{Ans}) \Rightarrow m$: $y = f'(\text{Ans})x + b$ door $C(3, 0) \Rightarrow 0 = f'(\text{Ans}) \cdot 3 + b \Rightarrow m$: $y \approx 0{,}62x - 1{,}86$.
$x \approx 4{,}54 \Rightarrow rc_m = f'(\text{Ans}) \Rightarrow n$: $y = f'(\text{Ans})x + b$ door $C(3, 0) \Rightarrow 0 = f'(\text{Ans}) \cdot 3 + b \Rightarrow n$: $y \approx 1{,}51x - 4{,}54$.



38a $f(x) = xe^{1-x} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot -1 = (1-x)e^{1-x} \Rightarrow f''(x) = -1 \cdot e^{1-x} + (1-x)e^{1-x} \cdot -1 = (x-2)e^{1-x}$.

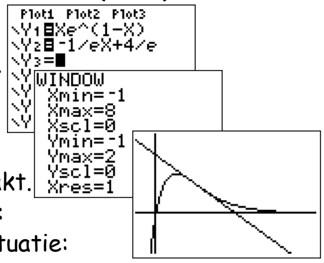
$f''(x) = 0 \Rightarrow (x-2)e^{1-x} = 0$ (e-macht is steeds positief) $\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

$f(2) = 2e^{1-2} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$ buigpunt $B(2, \frac{2}{e})$. Verder is $rc_k = f'(2) = (1-2)e^{1-2} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

k: $y = -\frac{1}{e}x + b$ door $B(2, \frac{2}{e}) \Rightarrow \frac{2}{e} = -\frac{1}{e} \cdot 2 + b \Rightarrow \frac{4}{e} = b \Rightarrow$ buigraaklijn k: $y = -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e}$.

k snijden met de x-as ($y = 0$) $\Rightarrow -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{e}x = -\frac{4}{e} \Rightarrow x = 4$. Dus $A(4, 0)$.

Er is geen lijn door een punt P op de positieve x-as links van A die de grafiek van f raakt.
Door een punt P op de x-as rechts van A zijn er twee lijnen die de grafiek van f raken:
één aan de bovenkant en één aan de onderkant. De lijn k door $A(4, 0)$ is de overgangssituatie:
de lijn k door $A(4, 0)$ raakt de grafiek aan de bovenkant én aan de onderkant, het is een buigraaklijn.



38b De lijn $y = a(x + \frac{1}{2})$ heeft rc $= a$ en gaat door $(-\frac{1}{2}, 0)$ (links van de oorsprong).

Uit de plot in 38a is af te lezen dat $f(x) = a(x + \frac{1}{2})$ precies één oplossing heeft
als $a \le 0$ of als de lijn $y = a(x + \frac{1}{2})$ raakt aan de grafiek van f.

Raaklijnen door $(-\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow$ de x-coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x) - 0}{x + \frac{1}{2}}$.

$(1-x)e^{1-x} = \frac{xe^{1-x}}{x + \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1-x}{1} = \frac{x}{x + \frac{1}{2}} \Rightarrow x = (1-x)(x + \frac{1}{2}) \Rightarrow x = x + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}x \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x+1)(x - \frac{1}{2}) = 0$.

$x = -1 \Rightarrow a = f'(-1) = (1+1)e^{1+1} = 2e^2$ en $x = \frac{1}{2} \Rightarrow a = f'(\frac{1}{2}) = (1 - \frac{1}{2})e^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e}$.

Conclusie: $a \le 0 \vee a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e} \vee a = 2e^2$.

39a De 1^e raaklijn door A is de x-as (raakt de grafiek van f in de oorsprong);
de 2^e raaklijn door A raakt f ergens links van de y-as en
de 3^e raaklijn door A raakt f ergens tussen de twee toppen.

39b Vanuit B één raaklijn (de x-as); vanuit C geen raaklijnen; vanuit D twee raaklijnen (één rustend boven op de grafiek in de buurt van de tweede top en één hangend onder tegen de grafiek rechts in de schets)
en vanuit E één raaklijn (de raaklijn uit E raakt de grafiek van f links van de y-as).

39c Er zijn drie punten op de x-as van waaruit je precies twee raaklijnen kunt tekenen:
het punt O (met als 1^e raaklijn de x-as en als 2^e raaklijn de lijn door O rustend op de grafiek van f ergens tussen de twee toppen);
het punt op de x-as van de linker buigraaklijn (met als 1^e raaklijn de x-as en als 2^e raaklijn deze buigraaklijn) en
het punt op de x-as van de rechter buigraaklijn (met als 1^e raaklijn de x-as en als 2^e raaklijn deze tweede buigraaklijn).

39d Het snijpunt van de rechter buigraaklijn met de y-as (met enige raaklijn vanuit dit punt op de y-as deze buigraaklijn).

40a $f(1) = 0{,}5 \cdot 1^2 + 1 + 1{,}5 = 3$ en $g(1) = -(1)^2 + 4 \cdot 1 = 3$.

40b $f(x) = 0{,}5x^2 + x + 1{,}5 \Rightarrow f'(x) = x + 1$
$f'(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow k$: $y = 2x + b$
k door $(1, 3) \Rightarrow 3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1$
k: $y = 2x + 1$.

$g(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow g'(x) = -2x + 4$
$g'(1) = -2 + 4 = 2 \Rightarrow l$: $y = 2x + b$
l door $(1, 3) \Rightarrow 3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1$
l: $y = 2x + 1$.

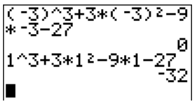
40c f en g hebben in $A(1, 3)$ dezelfde raaklijn $\Rightarrow$ de grafieken van f en g raken elkaar in $A(1, 3)$.

41 De grafieken van f en g hebben voor $x = -3$ geen punt gemeenschappelijk, dus raken elkaar zeker niet.
Wel geldt voor de raaklijn k in $(-3, f(-3))$ en de raaklijn l in $(-3, g(-3))$ evenwijdig lopen omdat $rc_k = rc_l$.

42a $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 8x + 2$ $\quad g(x) = x^2 + 11x + 28 \Rightarrow g'(x) = 2x + 11$.

Raken: $f(x) = g(x) \quad \wedge \quad f'(x) = g'(x)$
$x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = x^2 + 11x + 28 \quad \wedge \quad 3x^2 + 8x + 2 = 2x + 11$
$x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$ (loopt even vast) ❶ $\quad \wedge \quad 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot -3 - 27 = 0$ (klopt)
(dus de grafieken van f en g raken elkaar)
$1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 - 27 \neq 0$ (klopt niet)



$x^2 + 2x - 3 = 0$
$(x+3)(x-1) = 0$
$x = -3 \vee x = 1$ nu hiernaast invullen in ❶

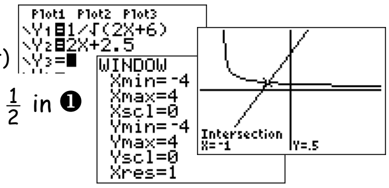
42b $g(-3) = (-3)^2 + 11 \cdot -3 + 28 = 9 - 33 + 28 = 4$ en $g'(-3) = 2 \cdot -3 + 11 = 5$.
k: $y = 5x + b$ door $(-3, 4) \Rightarrow 4 = 5 \cdot -3 + b \Rightarrow b = 19$.
De gemmenschappelijke raaklijn is: k: $y = 5x + 19$.

43 $f(x)=\sqrt{2x+6} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2x+6}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x+6}}$ $\qquad g(x)=x^2+2\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2} \Rightarrow g'(x)=2x+2\frac{1}{2}$.

Raken: $f(x)=g(x) \quad \wedge \quad f'(x)=g'(x)$

$\sqrt{2x+6}=x^2+2\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$ ❶ $\quad \wedge \quad \frac{1}{\sqrt{2x+6}}=2x+2\frac{1}{2}$ (intersect)

... $\qquad x=-1$ en $f'(-1)=g'(-1)=\frac{1}{2}$ in ❶



$f(-1)=\sqrt{4}=2$ en $g(-1)=(-1)^2+2\frac{1}{2}\cdot -1+3\frac{1}{2}=1-2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}=2$ (zijn ook gelijk).

Dus de grafieken van f en g raken elkaar (voor $x=-1$).

44 $f(x)=\frac{4x}{2x+5} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+5)\cdot 4-4x\cdot 2}{(2x+5)^2}=\frac{20}{(2x+5)^2}$ $\qquad g(x)=x^2+5x+2\frac{3}{4} \Rightarrow g'(x)=2x+5$.

Raken: $f(x)=g(x) \quad \wedge \quad f'(x)=g'(x)$

$\frac{4x}{2x+5}=x^2+5x+2\frac{3}{4}$ (hoe verder???) ❶ $\quad \wedge \quad \frac{20}{(2x+5)^2}=2x+5$

$(2x+5)^3=20$

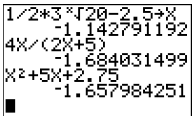
$2x+5=\sqrt[3]{20} \Rightarrow 2x=\sqrt[3]{20}-5 \Rightarrow$

$x=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{20}-2\frac{1}{2}$ nu invullen in ❶

$f(\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{20}-2\frac{1}{2})\approx -1{,}684$ en

$g(\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{20}-2\frac{1}{2})\approx -1{,}658$ (zijn niet gelijk)

Dus de grafieken van f en g raken elkaar niet.



45a $f(x)=e^x+2 \Rightarrow f'(x)=e^x$ $\qquad g(x)=2e+2-e^{-x+2} \Rightarrow g'(x)=-e^{-x+2}\cdot -1=e^{-x+2}$.

Raken: $f(x)=g(x) \quad \wedge \quad f'(x)=g'(x)$

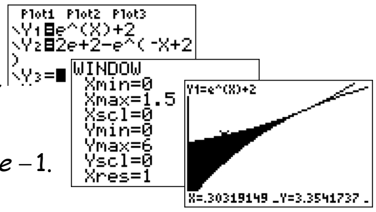
$e^x+2=2e+2-e^{-x+2}$ ❶ $\quad \wedge \quad e^x=e^{-x+2} \Rightarrow x=-x+2 \Rightarrow$

$f(1)=e+2$ en $g(1)=2e+2-e=e+2$ (zijn gelijk) $\qquad 2x=2$

Dus de grafieken van f en g raken elkaar in $(1,\ e+2)$. $\qquad x=1$ invullen in ❶

45b $O(V)=\int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx=\int_0^1 (e^x+2-(2e+2-e^{-x+2}))\,dx=\int_0^1 (e^x-2e+e^{-x+2})\,dx$

$=\left[e^x-2ex-e^{-x+2}\right]_0^1=e-2e-e-(e^0-0-e^2)=-2e-(1-e^2)=e^2-2e-1.$



46a $f(x)=\sqrt{2x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2x}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x}}$ $\qquad g_1(x)=x^2+1 \Rightarrow g_1'(x)=2x$.

Raken: $f(x)=g_1(x) \quad \wedge \quad f'(x)=g_1'(x)$

$\sqrt{2x}=x^2+1$ (kwadrateren geeft 4^e macht) ❶ $\quad \wedge \quad \frac{1}{\sqrt{2x}}=2x \Rightarrow \frac{1}{2x}=4x^2 \Rightarrow 8x^3=1$

$f(\frac{1}{2})=\sqrt{1}=1$ en $g_1(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+1$ (zijn niet gelijk) $\qquad x^3=\frac{1}{8}=(\frac{1}{2})^3$

Dus de grafieken van f en g_1 raken elkaar niet. $\qquad x=\frac{1}{2}$ invullen in ❶

46b Raken: $f(x)=g_p(x) \quad \wedge \quad f'(x)=g_p'(x)$

$\sqrt{2x}=x^2+p$ ❶ $\quad \wedge \quad \frac{1}{\sqrt{2x}}=2x$

$\sqrt{1}=\frac{1}{4}+p \qquad x=\frac{1}{2}$ (zie 46a) invullen in ❶

Dus de grafieken van f en g_1 raken elkaar voor $p=\frac{3}{4}$.

47a $x-\ln(x)=px$ $(x>0)$ en $1-\frac{1}{x}=p$ $(x\neq 0 \Rightarrow x\cdot(1-\frac{1}{x})=x\cdot p \Rightarrow x-1=px)$

$x-\ln(x)=px$ en $x-1=px \Rightarrow x-\ln(x)=x-1$.

47b $x-\ln(x)+2=p\sqrt{x}$ $(x>0)$ en $1-\frac{1}{x}=\frac{p}{2\cdot\sqrt{x}}$ $(x\neq 0)$

(delen door $\sqrt{x}$) $\qquad$ (vermenigvuldigen met $2\cdot\sqrt{x}$)

$\frac{x-\ln(x)+2}{\sqrt{x}}=p$ en $2\cdot\sqrt{x}\cdot(1-\frac{1}{x})=p$

$\frac{x-\ln(x)+2}{\sqrt{x}}=2\cdot\sqrt{x}\cdot(1-\frac{1}{x})$ (optie intersect $\Rightarrow$ x en p direct in 3 decimalen).

Het voordeel van deze aanpak is dat je meteen p vindt, want p is de y-coördinaat van de grafieken die je op de GR hebt ingevoerd.

48 $f(x)=-x^2+8x-12 \Rightarrow f'(x)=-2x+8$ $\qquad g(x)=x^2+px \Rightarrow g'(x)=2x+p$.

Raken: $f(x)=g(x) \quad \wedge \quad f'(x)=g'(x)$

$-x^2+8x-12=x^2+px$ ❶ $\quad \wedge \quad -2x+8=2x+p$

... $\qquad -4x+8=p$ ❷ invullen in ❶

$-x^2+8x-12=x^2+(-4x+8)x \Rightarrow -x^2+8x-12=x^2-4x^2+8x \Rightarrow 2x^2-12=0 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow$

$x=-\sqrt{6} \vee x=\sqrt{6}$ invullen in ❷ $\Rightarrow p=4\cdot\sqrt{6}+8 \vee p=-4\cdot\sqrt{6}+8$.

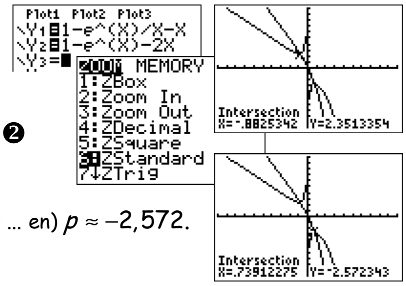
49 $f(x)=x-e^x \Rightarrow f'(x)=1-e^x$ $\quad g_p(x)=x^2+px \Rightarrow g_p'(x)=2x+p.$

Raken: $f(x)=g_p(x) \quad \wedge \quad f'(x)=g_p'(x)$

$x-e^x=x^2+px \quad \wedge \quad 1-e^x=2x+p$

$px=x-e^x-x^2 \quad \wedge \quad p=1-e^x-2x$ ❷

$p=1-\frac{e^x}{x}-x$ ❶



❶ $\wedge$ ❷ $\Rightarrow p=1-\frac{e^x}{x}-x=1-e^x-2x$ (intersect) $\Rightarrow$ ($x\approx$ ... en) $p\approx 2{,}351 \vee$ ($x\approx$ ... en) $p\approx -2{,}572.$

50a $f_3(x)=2\ln(x)+3x$ $(x>0) \Rightarrow f_3'(x)=\frac{2}{x}+3$ $\quad g_q(x)=x^2+q \Rightarrow g_q'(x)=2x.$

Raken: $f_3(x)=g_q(x) \quad \wedge \quad f_3'(x)=g_q'(x)$

$2\ln(x)+3x=x^2+q \quad \wedge \quad \frac{2}{x}+3=2x$ (vermenigvuldigen met $x\neq 0$)

$q=2\ln(x)+3x-x^2$ ❶ $\quad \wedge \quad 2+3x=2x^2$

... $\quad x^2-1\frac{1}{2}x-1=0$

$q=2\ln(2)+3\cdot 2-2^2 \quad (x+\frac{1}{2})(x-2)=0$

$=2\ln(2)+2. \quad x=-\frac{1}{2}$ (vold. niet) $\vee$ $x=2$ invullen in ❶

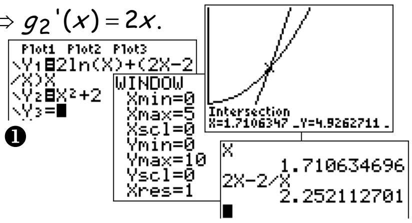
50b $f_p(x)=2\ln(x)+px$ $(x>0) \Rightarrow f_p'(x)=\frac{2}{x}+p$ $\quad g_2(x)=x^2+2 \Rightarrow g_2'(x)=2x.$

Raken: $f_p(x)=g_2(x) \quad \wedge \quad f_p'(x)=g_2'(x)$

$2\ln(x)+px=x^2+2$ ❶ $\quad \wedge \quad \frac{2}{x}+p=2x$

... $\quad \wedge \quad p=2x-\frac{2}{x}$ ❷ in ❶

$2\ln(x)+(2x-\frac{2}{x})x=x^2+2 \Rightarrow x\approx$ in ❷ $\Rightarrow p\approx 2{,}252.$



51 $f_p(x)=2x+p\ln(x)$ $(x>0) \Rightarrow f_p'(x)=2+\frac{p}{x}$ $\quad g_p(x)=px^2 \Rightarrow g_p'(x)=2px.$

Raken: $f_p(x)=g_p(x) \quad \wedge \quad f_p'(x)=g_p'(x)$

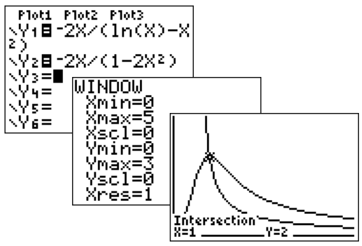
$2x+p\ln(x)=px^2 \quad \wedge \quad 2+\frac{p}{x}=2px$ (vermenigvuldigen met $x\neq 0$)

$p\ln(x)-px^2=-2x \quad \wedge \quad 2x+p=2px^2$

$p(\ln(x)-x^2)=-2x \quad \wedge \quad p-2px^2=-2x$

$p=\frac{-2x}{\ln(x)-x^2}$ ❶ $\quad \wedge \quad p(1-2x^2)=-2x$

... $\quad \wedge \quad p=\frac{-2x}{1-2x^2}$ ❷



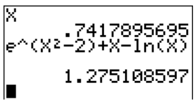
❶ $\wedge$ ❷ $\Rightarrow p=\frac{-2x}{\ln(x)-x^2}=\frac{-2x}{1-2x^2}$ (intersect) $\Rightarrow$ ($x=1$ en) $p=2.$

52 $f(x)=e^{x^2-2}+x \Rightarrow f'(x)=e^{x^2-2}\cdot 2x+1=2xe^{x^2-2}+1$ $\quad g_q(x)=\ln(x)+q$ $(x>0) \Rightarrow g_q'(x)=\frac{1}{x}.$

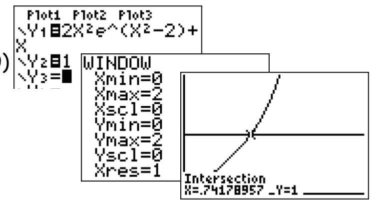
Raken: $f(x)=g_q(x) \quad \wedge \quad f'(x)=g_q'(x)$

$e^{x^2-2}+x=\ln(x)+q \quad \wedge \quad 2xe^{x^2-2}+1=\frac{1}{x}$ (verm. met $x\neq 0$)

$q=e^{x^2-2}+x-\ln(x)$ ❶ $\quad 2x^2e^{x^2-2}+x=1$ (intersect)



$x\approx 0{,}742$ in ❶ $\Rightarrow q\approx 1{,}275.$



53 $rc_l=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}.$ $\quad k\perp l \Leftrightarrow rc_k\times rc_l=-1$

54 $f(x)=\sqrt{x}$ $(x\geq 0) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ $(x>0)$ $\quad g(x)=-\frac{1}{2}x^2+10 \Rightarrow g'(x)=-x.$

Loodrecht snijden: $f(x)=g(x) \quad \wedge \quad f'(x)\cdot g'(x)=-1$

$\sqrt{x}=-\frac{1}{2}x^2+10$ ❶ $\quad \wedge \quad \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot -x=-1$

... $\quad \wedge \quad \frac{-x}{2\cdot\sqrt{x}}=-1$

$\sqrt{4}=-\frac{1}{2}\cdot 4^2+10 \quad \frac{\sqrt{x}}{2}=1$

$2=-8+10$ (klopt) $\quad \sqrt{x}=2$

Dus de grafieken snijden elkaar loodrecht. $\quad x=4$ (voldoet) in ❶

55 $f(x)=\sqrt{2}\cdot\sin(x)\Rightarrow f'(x)=\sqrt{2}\cdot\cos(x)$ $\qquad g(x)=\sqrt{2}\cdot\cos(x)\Rightarrow g'(x)=-\sqrt{2}\cdot\sin(x)$.

Loodrecht snijden: $f(x)=g(x) \quad\wedge\quad f'(x)\cdot g'(x)=-1$

$\sqrt{2}\cdot\sin(x)=\sqrt{2}\cdot\cos(x) \quad\wedge\quad \sqrt{2}\cdot\cos(x)\cdot-\sqrt{2}\cdot\sin(x)=-1$

$\sin(x)=\cos(x) \quad\wedge\quad -2\sin(x)\cos(x)=-1$

$\cos(x-\frac{1}{2}\pi)=\cos(x) \quad\wedge\quad \sin(2x)=1$

$(x-\frac{1}{2}\pi=x+k\cdot 2\pi \ \vee\ x-\frac{1}{2}\pi=-x+k\cdot 2\pi) \quad\wedge\quad 2x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

(voldoet niet) $\quad 2x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \quad\wedge\quad 2x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$.

Dit klopt, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

56 $f_p(x)=p\sqrt{x}\ (x\geq 0)\Rightarrow f_p'(x)=\frac{p}{2\cdot\sqrt{x}}\ (x>0)$ $\qquad g(x)=\frac{8}{x}=8x^{-1}\ (x\neq 0)\Rightarrow g'(x)=-8x^{-2}=-\frac{8}{x^2}\ (x\neq 0)$.

$f_p(x)=g(x) \quad\wedge\quad f_p'(x)\cdot g'(x)=-1$

$p\sqrt{x}=\frac{8}{x}\Rightarrow p=\frac{8}{x\cdot\sqrt{x}}$ ❶ $\quad\wedge\quad \frac{p}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot-\frac{8}{x^2}=-1\Rightarrow p=\frac{2\cdot x^2\cdot\sqrt{x}}{8}=\frac{x^2\cdot\sqrt{x}}{4}$ ❷

❶ $\wedge$ ❷ $\Rightarrow \frac{8}{x\cdot\sqrt{x}}=\frac{x^2\cdot\sqrt{x}}{4}\Rightarrow x^4=32\Rightarrow x=-\sqrt[4]{32}$ (<0 voldoet niet) $\vee\ x=\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2^{\frac{5}{4}}=2\cdot 2^{\frac{1}{4}}=2\cdot\sqrt[4]{2}$.

$x=2\cdot\sqrt[4]{2}$ in ❷ $\Rightarrow p=\frac{(2^{\frac{5}{4}})^2\cdot(2^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}}{2^2}=\frac{2^{\frac{5}{2}}\cdot 2^{\frac{5}{8}}}{2^2}=\frac{2^{(\frac{5}{2}+\frac{5}{8})}}{2^2}=\frac{2^{(\frac{20}{8}+\frac{5}{8})}}{2^2}=\frac{2^{\frac{25}{8}}}{2^2}=2^{(\frac{25}{8}-2)}=2^{\frac{9}{8}}=2\cdot 2^{\frac{1}{8}}=2\cdot\sqrt[8]{2}$.

$g(2\cdot\sqrt[4]{2})=\frac{8}{2^{\frac{5}{4}}}=\frac{2^3}{2^{\frac{5}{4}}}=2^{(3-\frac{5}{4})}=2^{1\frac{3}{4}}=2\cdot 2^{\frac{3}{4}}=2\cdot\sqrt[4]{2^3}=2\cdot\sqrt[4]{8}$. Het snijpunt is $(2\cdot\sqrt[4]{2},\ 2\cdot\sqrt[4]{8})$.

57a $f(x)=x^2-4x\Rightarrow f'(x)=2x-4$ met $f'(5)=2\cdot 5-4=6$. $\qquad$ ($f(5)=5^2-4\cdot 5=25-20=5\Rightarrow A$ ligt inderdaad op f)

k snijdt f in $x=5$ loodrecht $\Rightarrow f'(5)\cdot \mathrm{rc}_k=-1\Rightarrow 6\cdot\mathrm{rc}_k=-1\Rightarrow \mathrm{rc}_k=-\frac{1}{6}$

k: $y=-\frac{1}{6}x+b$ door $A(5,5)\Rightarrow 5=-\frac{1}{6}\cdot 5+b\Rightarrow b=5\frac{5}{6}$. $\quad$ Dus k: $y=-\frac{1}{6}x+5\frac{5}{6}$.

57b $g(x)=\frac{2x-1}{x+2}\Rightarrow g'(x)=\frac{(x+2)\cdot 2-(2x-1)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$.

$g(x)=-5x+p \quad\wedge\quad g'(x)\cdot\mathrm{rc}_l=-1$

$\frac{2x-1}{x+2}=-5x+p \quad\wedge\quad \frac{5}{(x+2)^2}\cdot-5=-1$

$p=\frac{2x-1}{x+2}+5x$ ❶ $\quad\wedge\quad \frac{25}{(x+2)^2}=1$

... $\quad\wedge\quad (x+2)^2=25\Rightarrow x+2=5\ \vee\ x+2=-5\Rightarrow x=3\ \vee\ x=-7$

Invullen in ❶ geeft $(x=3\Rightarrow)\ p=\frac{5}{5}+15=1+15=16$ en $(x=-7\Rightarrow)\ p=\frac{-15}{-5}-35=3-35=-32$.

57c $h(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\Rightarrow h'(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}\cdot 2-2x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+4}}\cdot 2x}{x^2+4}=\frac{2\cdot\sqrt{x^2+4}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{2(x^2+4)-2x^2}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}=\frac{8}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}$.

$h(x)=-8x+q \quad\wedge\quad h'(x)\cdot\mathrm{rc}_m=-1$

$\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}=-8x+q \quad\wedge\quad \frac{8}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}\cdot-8=-1$

$q=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}+8x$ ❶ $\quad\wedge\quad \frac{64}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}=1$

... $\quad\wedge\quad (x^2+4)^{1\frac{1}{2}}=64=2^6\Rightarrow x^2+4=2^4\Rightarrow x^2=12\Rightarrow x=\sqrt{12}\ \vee\ x=-\sqrt{12}$ in ❶ $\Rightarrow$

$x=\sqrt{12}\Rightarrow q=\frac{2\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{12+4}}+8\cdot\sqrt{12}=\frac{2}{4}\cdot\sqrt{12}+8\cdot\sqrt{12}=8\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}=8\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot 3}=17\cdot\sqrt{3}$.

$x=-\sqrt{12}\Rightarrow q=\frac{2\cdot-\sqrt{12}}{\sqrt{12+4}}+8\cdot-\sqrt{12}=-\frac{2}{4}\cdot\sqrt{12}-8\cdot\sqrt{12}=-8\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}=-17\cdot\sqrt{3}$.

58 $f_p(x)=(x^2-p)e^x\Rightarrow f_p'(x)=2x\cdot e^x+(x^2-p)\cdot e^x=(x^2+2x-p)e^x$.

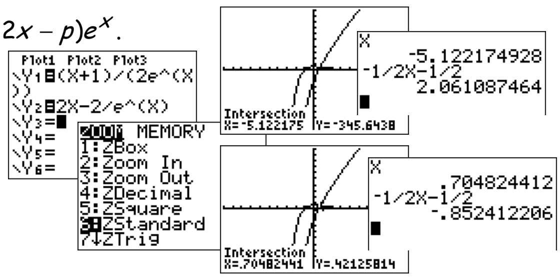
$f_p(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ (•) $\quad\wedge\quad f_p'(x)\cdot\mathrm{rc}_k=-1$

$(x^2-p)e^x=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad\wedge\quad (x^2+2x-p)e^x\cdot-\frac{1}{2}=-1$

$x^2-p=-\frac{x}{2e^x}-\frac{1}{2e^x} \quad\wedge\quad (x^2+2x-p)e^x=2$

$p=x^2+\frac{x}{2e^x}+\frac{1}{2e^x} \quad\wedge\quad x^2+2x-p=\frac{2}{e^x}$

$p=x^2+\frac{x+1}{2e^x}$ ❶ $\quad\wedge\quad p=x^2+2x-\frac{2}{e^x}$ ❷



❶ $\wedge$ ❷ $\Rightarrow p=x^2+\frac{x+1}{2e^x}=x^2+2x-\frac{2}{e^x}$ (intersect) $\Rightarrow x\approx -5{,}12\ \vee\ x\approx 0{,}70$

$x\approx -5{,}12$ in (•) $\Rightarrow y\approx 2{,}06\Rightarrow A(-5{,}12;\ 2{,}06)$ en $x\approx 0{,}70$ in (•) $\Rightarrow y\approx -0{,}85\Rightarrow A(0{,}70;\ -0{,}85)$.

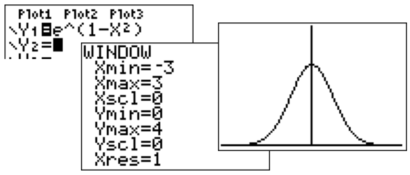
59a $f(x)=e^{1-x^2} \Rightarrow f'(x)=e^{1-x^2}\cdot -2x=-2xe^{1-x^2} \Rightarrow f''(x)=-2\cdot e^{1-x^2}-2x\cdot e^{1-x^2}\cdot -2x=(4x^2-2)e^{1-x^2}$.

$f''(x)=0 \Rightarrow (4x^2-2)e^{1-x^2}=0$ (e-macht is alleen positief)

$4x^2=2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\sqrt{\frac{1}{2}}=-\sqrt{\frac{2}{4}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2} \ \vee \ x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$f(-\frac{1}{2}\sqrt{2})=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ en $f(\frac{1}{2}\sqrt{2})=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

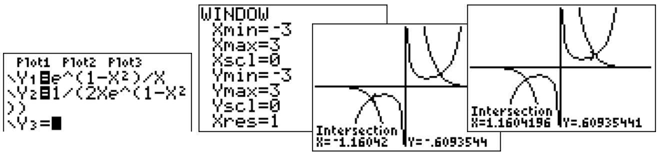
De buigpunten (zie ook een plot) zijn $(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\sqrt{e})$ en $(\frac{1}{2}\sqrt{2},\sqrt{e})$.



59b $f(x)=ax \quad \wedge \quad f'(x)\cdot a=-1$

$e^{1-x^2}=ax \quad \wedge \quad -2xe^{1-x^2}\cdot a=-1$

$a=\frac{e^{1-x^2}}{x}$ ❶ $\quad \wedge \quad a=\frac{1}{2xe^{1-x^2}}$ ❷



❶ $\wedge$ ❷ $\Rightarrow a=\frac{e^{1-x^2}}{x}=\frac{1}{2xe^{1-x^2}}$ (intersect) $\Rightarrow x\approx -1{,}16$ met $a\approx -0{,}61 \ \vee \ x\approx 1{,}16$ met $a\approx 0{,}61$.

60a $f(x)=x^3-x \Rightarrow f'(x)=3x^2-1 \qquad g_p(x)=\frac{p}{x}=px^{-1}\ (x\neq 0) \Rightarrow g_p'(x)=-px^{-2}=-\frac{p}{x^2}$.

Raken: $f(x)=g_p(x) \quad \wedge \quad f'(x)=g_p'(x)$

$x^3-x=\frac{p}{x}$ (verm. met $x\neq 0$) $\quad \wedge \quad 3x^2-1=-\frac{p}{x^2}$ (verm. met $-x^2\neq 0$)

$p=x^4-x^2$ ❶ $\quad \wedge \quad p=-3x^4+x^2$ ❷

$x^4-x^2=-3x^4+x^2 \Rightarrow 4x^4-2x^2=0 \Rightarrow 4x^2(x^2-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow x^2=0 \ \vee \ x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$x=0$ (voldoet niet) $\vee \ x=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2} \ \vee \ x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (komt van $x^2=\frac{1}{2}$) in ❶ $\Rightarrow p=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ en $y=f(\frac{1}{2}\sqrt{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}=-\frac{1}{4}\sqrt{2} \Rightarrow A(\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{4}\sqrt{2})$;

$x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (komt van $x^2=\frac{1}{2}$) in ❶ $\Rightarrow p=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ en $y=f(-\frac{1}{2}\sqrt{2})=\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{4}\sqrt{2} \Rightarrow A(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{4}\sqrt{2})$.

60b Loodrecht snijden: $f(x)=g_p(x) \quad \wedge \quad f'(x)\cdot g_p'(x)=-1$

$x^3-x=\frac{p}{x}$ (verm. met $x\neq 0$) $\quad \wedge \quad (3x^2-1)\cdot -\frac{p}{x^2}=-1$ (verm. met $-x^2\neq 0$)

$p=x^4-x^2$ ❶ $\quad \wedge \quad p\cdot(3x^2-1)=x^2$

... $\quad \wedge \quad p=\frac{x^2}{3x^2-1}$ ❷

$x^4-x^2=\frac{x^2}{3x^2-1} \Rightarrow (x^4-x^2)\cdot(3x^2-1)=x^2 \Rightarrow (x^2-1)\cdot(3x^2-1)=1 \Rightarrow 3x^4-x^2-3x^2+1=1 \Rightarrow 3x^4-4x^2=0 \Rightarrow$

$3x^2(x^2-\frac{4}{3})=0 \Rightarrow x^2=0 \ \vee \ x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow x=0$ (voldoet niet) $\vee \ x=\sqrt{\frac{4}{3}}=2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3} \ \vee \ x=-\sqrt{\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

$x=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (kwam $x^2=\frac{4}{3}$) in ❶ $\Rightarrow p=\frac{16}{9}-\frac{4}{3}=\frac{16}{9}-\frac{12}{9}=\frac{4}{9}$ en $y=f(\frac{2}{3}\sqrt{3})=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{2}{9}\sqrt{3} \Rightarrow B(\frac{2}{3}\sqrt{3},\frac{2}{9}\sqrt{3})$;

$x=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (kwam $x^2=\frac{4}{3}$) in ❶ $\Rightarrow p=\frac{16}{9}-\frac{4}{3}=\frac{4}{9}$ en $y=f(-\frac{2}{3}\sqrt{3})=\frac{4}{3}\cdot -\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}=-\frac{2}{9}\sqrt{3} \Rightarrow B(-\frac{2}{3}\sqrt{3},-\frac{2}{9}\sqrt{3})$.

Diagnostische toets

D1 $f(x)=x^4-x^3-9x^2-5x \Rightarrow f'(x)=4x^3-3x^2-18x-5 \Rightarrow f''(x)=12x^2-6x-18$.

$f''(x)=0 \Rightarrow 12x^2-6x-18=0$ (*abc*-formule of) $\Rightarrow x^2-\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}=0 \Rightarrow (x-1\frac{1}{2})(x+1)=0 \Rightarrow x=1\frac{1}{2} \ \vee \ x=-1$.

$x=1\frac{1}{2} \Rightarrow y=f(1\frac{1}{2})=-26\frac{1}{16} \Rightarrow$ buigpunt: $(1\frac{1}{2},-26\frac{1}{16})$.

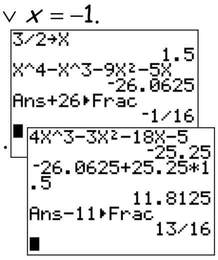
Buigraaklijn k: $y=ax+b$ met $a=f'(1\frac{1}{2})=-25\frac{1}{4}$.

k: $y=-25\frac{1}{4}x+b$ door $(1\frac{1}{2},-26\frac{1}{16}) \Rightarrow -26\frac{1}{16}=-25\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{2}+b \Rightarrow 11\frac{13}{16}=b$. Dus k: $y=-25\frac{1}{4}x+11\frac{13}{16}$.

$x=-1 \Rightarrow y=f(-1)=1+1-9+5=-2 \Rightarrow$ buigpunt: $(-1,-2)$.

Buigraaklijn l: $y=ax+b$ met $a=f'(-1)=-4-3+18-5=6$.

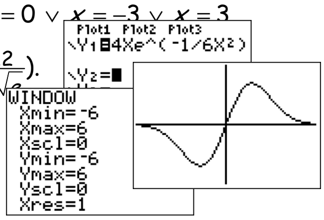
l: $y=6x+b$ door $(-1,-2) \Rightarrow -2=6\cdot -1+b \Rightarrow -2=-6+b \Rightarrow 4=b$. Dus l: $y=6x+4$.



D2 $f(x)=4xe^{-\frac{1}{6}x^2}\Rightarrow f'(x)=4e^{-\frac{1}{6}x^2}+4xe^{-\frac{1}{6}x^2}\cdot -\frac{1}{3}x=4e^{-\frac{1}{6}x^2}\cdot(1-\frac{1}{3}x^2)$ en

$f''(x)=4e^{-\frac{1}{6}x^2}\cdot -\frac{1}{3}x\cdot(1-\frac{1}{3}x^2)+4e^{-\frac{1}{6}x^2}\cdot -\frac{2}{3}x=-\frac{4}{3}xe^{-\frac{1}{6}x^2}\cdot(1-\frac{1}{3}x^2-2)=-\frac{4}{3}xe^{-\frac{1}{6}x^2}\cdot(3-\frac{1}{3}x^2)$.

$f''(x)=0\Rightarrow -\frac{4}{3}xe^{-\frac{1}{6}x^2}\cdot(3-\frac{1}{3}x^2)=0\Rightarrow x=0\vee 3-\frac{1}{3}x^2=0\Rightarrow x=0\vee x^2=9\Rightarrow x=0\vee x=-3\vee x=3$



$x=-3\Rightarrow y=f(-3)=-12e^{-\frac{9}{6}}=\frac{-12}{e^{1\frac{1}{2}}}=\frac{-12}{e\cdot\sqrt{e}}\Rightarrow$ buigpunt (zie plot: van bol naar hol): $(-3,-\frac{12}{e\sqrt{e}})$.

$x=0\Rightarrow y=f(0)=0\Rightarrow$ buigpunt (zie plot: van hol naar bol): $(0,0)$.

$x=3\Rightarrow y=f(3)=12e^{-\frac{9}{6}}=\frac{12}{e^{1\frac{1}{2}}}=\frac{12}{e\cdot\sqrt{e}}\Rightarrow$ buigpunt (zie plot: van bol naar hol): $(3,\frac{12}{e\sqrt{e}})$.

D3 $g(x)=\frac{\ln(x)}{x}\Rightarrow g'(x)=\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}\Rightarrow g''(x)=\frac{x^2\cdot -\frac{1}{x}-(1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\ln(x))}{x^4}=\frac{-3x+2x\ln(x))}{x^4}$.

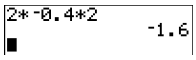
$g'(x)=0\Rightarrow \frac{1-\ln(x)}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln(x)=0\Rightarrow \ln(x)=1\Rightarrow x=e^1=e$ met $g(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}\Rightarrow$ top: $(e,\frac{1}{e})$.

$g''(x)=0$ (teller = 0 en noemer $\neq 0$) $\Rightarrow 2x\ln x-3x=0\Rightarrow x(2\ln x-3)=0\Rightarrow x=0$ (vold. niet want noemer = 0) $\vee\ 2\ln(x)=3$

Dus $\ln(x)=\frac{3}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}=e^{1\frac{1}{2}}=e^1\cdot e^{\frac{1}{2}}=e\sqrt{e}$ met $g(e\sqrt{e})=\frac{\ln(e^{\frac{3}{2}})}{e\cdot\sqrt{e}}=\frac{\frac{3}{2}}{e\sqrt{e}}=\frac{3}{2e\sqrt{e}}\Rightarrow$ buigpunt: $(e\sqrt{e},\frac{3}{2e\sqrt{e}})$.

D4 $H(t)=e^{-0{,}2t^2+2t+1}\Rightarrow$ de groeisnelheid $H'(t)=\frac{dH}{dt}=e^{-0{,}2t^2+2t+1}\cdot(-0{,}4t+2)=(-0{,}4t+2)\cdot e^{-0{,}2t^2+2t+1}\Rightarrow$

$H''(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right)=-0{,}4\cdot e^{-0{,}2t^2+2t+1}+(-0{,}4t+2)\cdot e^{-0{,}2t^2+2t+1}\cdot(-0{,}4t+2)$



$=-0{,}4\cdot e^{-0{,}2t^2+2t+1}+(0{,}16t^2-1{,}6t+4)\cdot e^{-0{,}2t^2+2t+1}=(0{,}16t^2-1{,}6t+3{,}6)\cdot e^{-0{,}2t^2+2t+1}$.

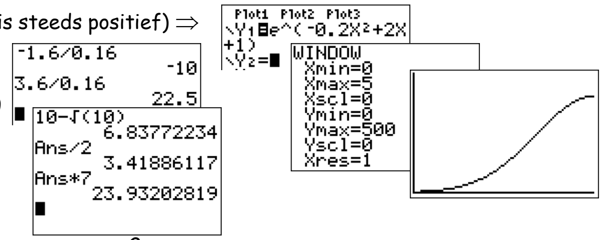
De groeisnelheid is maximaal als $\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right)=0$ (een e-macht is steeds positief) $\Rightarrow$

$0{,}16t^2-1{,}6t+3{,}6=0$

$t^2-10t+22{,}5=0$ met $D=10^2-4\cdot1\cdot22{,}5=100-90=10$

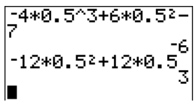
$t=\frac{10-\sqrt{10}}{2}\approx 3{,}42$ (weken) $\vee\ t=\frac{10+\sqrt{10}}{2}>5$ (voldoet niet).

De groeisnelheid is maximaal na ongeveer 24 dagen.



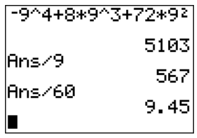
D5 $f(x)=-x^4+2x^3-7x+3\Rightarrow f'(x)=-4x^3+6x^2-7\Rightarrow f''(x)=-12x^2+12x$.

$\left.\begin{array}{l} f'(\frac{1}{2})=-4\cdot\frac{1}{2}^3+6\cdot\frac{1}{2}^2-7<0 \\ f''(\frac{1}{2})=-12\cdot\frac{1}{2}^2+12\cdot\frac{1}{2}>0 \end{array}\right\}\Rightarrow$ in A is de grafiek van f afnemend dalend.



D6a $s(0)=0$ (m) en $s(9)=-9^4+8\cdot9^3+72\cdot9^2=5103$ (m).

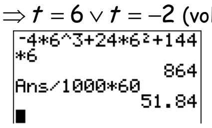
De gemiddelde snelheid op $[0,9]$ is $\frac{5103-0}{9-0}=\frac{5103}{9}$ (m/min). Dit is $\frac{5103}{9}\div 60=9{,}45$ m/s.



D6b $s(t)=-t^4+8t^3+72t^2\Rightarrow v(t)=\frac{ds}{dt}=-4t^3+24t^2+144t\Rightarrow a(t)=\frac{dv}{dt}=-12t^2+48t+144$.

v maximaal $\Rightarrow \frac{dv}{dt}=0\Rightarrow -12t^2+48t+144=0\Rightarrow t^2-4t-12=0\Rightarrow (t-6)(t+2)=0\Rightarrow t=6\vee t=-2$ (voldoet niet).

Dus $v_{max}=v(6)=-4\cdot6^3+24\cdot6^2+144\cdot6=864$ (m/min). Dit is ongeveer 52 km/uur.



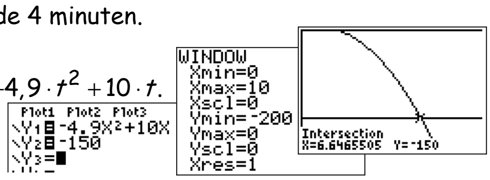
D6c $a(0)=-12\cdot0^2+48\cdot0+144=144$.

Eerst $a(t)=a(0)\Rightarrow -12t^2+48t+144=144\Rightarrow -12t^2+48t=0\Rightarrow 12t(-t+4)=0\Rightarrow t=0\vee t=4$.

$a(t)>a(0)$ (de grafiek van a is een bergparabool) $\Rightarrow 0<t<4$. Dus gedurende 4 minuten.

D7 $a(t)=-9{,}8\Rightarrow v(t)=-9{,}8t+v(0)\Rightarrow s(t)=-9{,}8\cdot\frac{1}{2}t^2+v(0)\cdot t+s(0)=-4{,}9\cdot t^2+10\cdot t$.

$s(t)=-150\Rightarrow -4{,}9\cdot t^2+10\cdot t=-150$ (intersect) $\Rightarrow t\approx 6{,}65$ (s).



D8 $f(x)=\frac{x^2}{2\ln(x)}$ (met $x>0$ vanwege ln ... en $\ln(x)\neq 0\Rightarrow x\neq 1$ zie ook figuur 13.18) $\Rightarrow f'(x)=\frac{2\ln(x)\cdot 2x-x^2\cdot 2\cdot\frac{1}{x}}{(2\ln(x))^2}=\frac{4x\ln(x)-2x}{(2\ln(x))^2}$.

Raaklijn door $O(0,0)\Rightarrow$ de x-coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x)=\frac{f(x)}{x}$.

$\frac{4x\ln(x)-2x}{(2\ln(x))^2}=\frac{x}{2\ln(x)}\Rightarrow 8x(\ln(x))^2-4x\ln(x)=4x(\ln(x))^2\Rightarrow 4x(\ln(x))^2-4x\ln(x)=0\Rightarrow 4x\cdot\ln(x)\cdot(\ln(x)-1)=0\Rightarrow$

$4x=0\vee\ln(x)=0\vee\ln(x)=1\Rightarrow x=0$ (vold. niet) $\vee\ x=1$ (vold. niet) $\vee\ x=e$.

$x=e\Rightarrow y=f(e)=\frac{e^2}{2\ln(e)}=\frac{e^2}{2}=\frac{1}{2}e^2\Rightarrow$ raakpunt: $(e,\frac{1}{2}e^2)$.

D9a $f(x) = x - \ln(x)$ (met $x > 0$ vanwege ln...) $\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Raaklijn door $A(0,-1) \Rightarrow$ de x-coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x)+1}{x}$.

$1 - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(x) + 1}{x} \Rightarrow \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(x) + 1}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{x - \ln(x) + 1}{x} \Rightarrow x - 1 = x - \ln(x) + 1 \Rightarrow \ln(x) = 2 \Rightarrow x = e^2$.

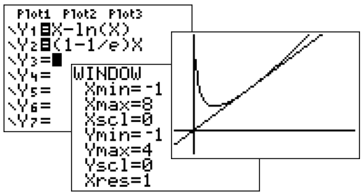
$x = e^2 \Rightarrow rc_k = f'(e^2) = 1 - \frac{1}{e^2} \Rightarrow k\text{: } y = (1 - \frac{1}{e^2})x + b$ door $A(0,-1) \Rightarrow k\text{: } y = (1 - \frac{1}{e^2})x - 1$.

D9b Raaklijn door $O(0,0) \Rightarrow$ de x-coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

$1 - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(x)}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{x - \ln(x)}{x} \Rightarrow x - 1 = x - \ln(x) \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e^1 = e$.

$x = e \Rightarrow rc_{\text{raaklijn}} = f'(e) = 1 - \frac{1}{e}$.

$f(x) = ax$ heeft geen oplossing (zie de plot hiernaast) voor $a < 1 - \frac{1}{e}$.



D10a $f(x) = \ln(x^2)$ $(x > 0) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$ $\qquad g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = 2x$.

Raken: $f(x) = g(x)$ $\wedge$ $f'(x) = g'(x)$

$\ln(x^2) = x^2 - 1$ (hoe verder???) ❶ $\wedge$ $\frac{2}{x} = 2x$ (vermenigvuldigen met $x \neq 0$)

$f(1) = \ln(1) = 0$ en $g(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ (zijn gelijk) $\qquad 2 = 2x^2$

$f(-1) = \ln(1) = 0$ en $g(1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ (zijn gelijk) $\qquad x^2 = 1$

Dus de grafieken van f en g raken elkaar in (1, 0) en (−1, 0). $\qquad x = 1 \vee x = -1$ nu invullen in ❶

D10b $f'(1) = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow k\text{: } y = 2x + b$ door $(1, 0) \Rightarrow 0 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -2$. Dus $k\text{: } y = 2x - 2$.

$f'(-1) = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow l\text{: } y = -2x + b$ door $(-1, 0) \Rightarrow 0 = -2 \cdot -1 + b \Rightarrow b = -2$. Dus $l\text{: } y = -2x - 2$.

D11 $f(x) = \frac{3}{2x^2} = \frac{3}{2}x^{-2}$ $(x \neq 0) \Rightarrow f'(x) = -3x^{-3} = \frac{-3}{x^3}$ $\qquad g(x) = 2\frac{1}{2} - x^3 \Rightarrow g'(x) = -3x^2$.

Raken: $f(x) = g(x)$ $\wedge$ $f'(x) = g'(x)$

$\frac{3}{2x^2} = 2\frac{1}{2} - x^3$ ❶ $\wedge$ $\frac{-3}{x^3} = -3x^2$ (vermenigvuldigen met $-x^3 \neq 0$)

... $\qquad -3 = -3x^5$

$f(1) = \frac{3}{2}$ en $g(1) = 2\frac{1}{2} - 1 = 1\frac{1}{2}$ (zijn gelijk) $\qquad x^5 = 1$

Dus de grafieken van f en g raken elkaar. $\qquad x = \sqrt[5]{1} = 1$ invullen in ❶

D12 $f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$ $\qquad g_p(x) = px + 16 \Rightarrow g_p'(x) = p$.

Raken: $f(x) = g_p(x)$ $\wedge$ $f'(x) = g_p'(x)$

$x^3 - 3x = px + 16$ ❶ $\wedge$ $3x^2 - 3 = p$ ❷ invullen in ❶ geeft

$x^3 - 3x = x \cdot (3x^2 - 3) + 16$

$x^3 - 3x = 3x^3 - 3x + 16$

$-2x^3 = 16 \Rightarrow x^3 = -8 = (-2)^3 \Rightarrow x = -2$ invullen in ❶ $\Rightarrow p = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9$.

D13 $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} \Rightarrow f_p'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+5}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$.

Loodrecht snijden: $f(x) = -1\frac{1}{2}x + 6$ $\wedge$ $f'(x) \cdot rc_l = -1$

$\sqrt{x^2 + 5} = -1\frac{1}{2}x + 6$ ❶ $\wedge$ $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \cdot -\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{x^2 + 5} = 3x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 5} = 1\frac{1}{2}x$ ❷

❶ $\wedge$ ❷ $\Rightarrow -1\frac{1}{2}x + 6 = 1\frac{1}{2}x \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$ (voldoet aan ❶ en ❷) $\Rightarrow l$ snijdt de grafiek van f loodrecht.

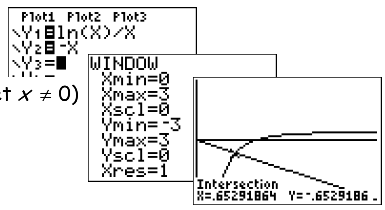
D14 $f(x) = \ln(x)$ $(x > 0) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad g_p(x) = px \Rightarrow g_p'(x) = p$.

Loodrecht snijden: $f(x) = g_p(x)$ $\wedge$ $f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

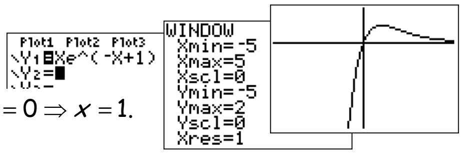
$\ln(x) = px$ $\wedge$ $\frac{1}{x} \cdot p = -1$ (vermenigvuldigen met $x \neq 0$)

$\frac{\ln(x)}{x} = p$ ❶ $\wedge$ $p = -x$ ❷

❶ $\wedge$ ❷ $\Rightarrow p = \frac{\ln(x)}{x} = -x$ (intersect) $\Rightarrow$ ($x \approx 0{,}65$ en) $p \approx -0{,}65$.



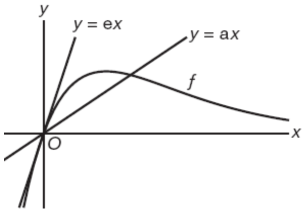
Gemengde opgaven 13. Afgeleide en tweede afgeleide



G14a $f(x)=xe^{-x+1}\Rightarrow f'(x)=1\cdot e^{-x+1}+x\cdot e^{-x+1}\cdot -1=(1-x)e^{-x+1}$.

$f'(x)=0\Rightarrow (1-x)e^{-x+1}=0$ (een e-macht is alleen positief) $\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1$.

Maximum (zie plot) $f(1)=1\cdot e^0=1\cdot 1=1$. Het bereik $B_f=\langle\leftarrow, 1]$.



G14b $f'(x)=(1-x)e^{-x+1}\Rightarrow f''(x)=-1\cdot e^{-x+1}+(1-x)\cdot e^{-x+1}\cdot -1=(x-2)e^{-x+1}$.

$f''(x)=0\Rightarrow (x-2)e^{-x+1}=0$ (een e-macht is alleen positief) $\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$.

$f(2)=2\cdot e^{-1}=\frac{2}{e}\Rightarrow$ het buigpunt is $(2, \frac{2}{e})$.

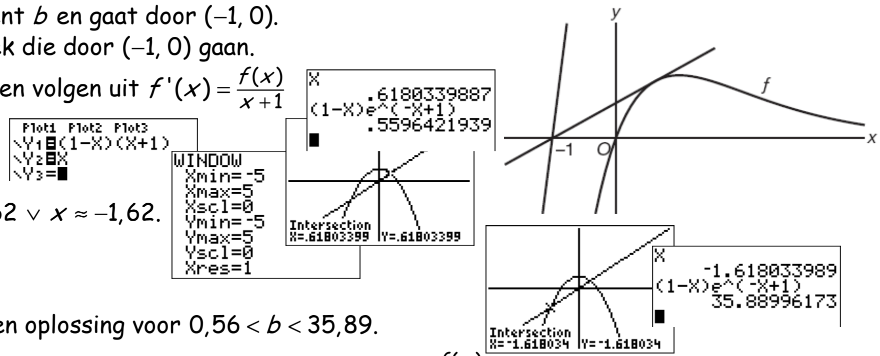
G14c $f'(0)=e$. Nu aflezen in een plot:

$xe^{-x+1}=ax$ ($y=ax$ is een lijn door O) heeft één oplossing als $a\le 0\vee a=e$.

G14d $y=b(x+1)$ heeft richtingscoëfficiënt b en gaat door $(-1, 0)$.

Er zijn twee raaklijnen van de grafiek die door $(-1, 0)$ gaan.

De x-coördinaten van deze raakpunten volgen uit $f'(x)=\frac{f(x)}{x+1}$



$(1-x)e^{-x+1}=\frac{xe^{-x+1}}{x+1}$

$\frac{1-x}{1}=\frac{x}{x+1}$

$(1-x)(x+1)=x$ (intersect) $\Rightarrow x\approx 0{,}62\vee x\approx -1{,}62$.

$rc_{\text{raaklijn 1}}\approx f'(0{,}62)\approx 0{,}56$ en

$rc_{\text{raaklijn 2}}\approx f'(-1{,}62)\approx 35{,}89$.

Aflezen: $xe^{-x+1}=b(x+1)$ heeft geen oplossing voor $0{,}56<b<35{,}89$.

G14e Raaklijn door $C(c, 0)\Rightarrow$ de x-coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x)=\frac{f(x)}{x-c}$.

$(1-x)e^{-x+1}=\frac{xe^{-x+1}}{x-c}$

$(1-x)(x-c)=x$

$x-c-x^2+cx=x$

$x^2-cx+c=0$

Deze vergelijking heeft oplossingen $\Rightarrow D\ge 0$.

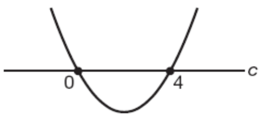
$D\ge 0$

$(-c)^2-4\cdot 1\cdot c\ge 0$

$c^2-4c\ge 0$

$c(c-4)\ge 0$ (zie de schets hiernaast)

$c\le 0\vee c\ge 4$.



G15a $f_a(x)=x^3-4x^2+a\Rightarrow f_a'(x)=3x^2-8x\Rightarrow f_a''(x)=6x-8$. $f_a''(x)=0\Rightarrow 6x-8=0\Rightarrow 6x=8\Rightarrow x=\frac{4}{3}$.

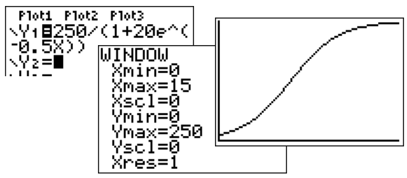
$rc_{\text{buigraaklijn}}=f_a'(\frac43)=3\cdot(\frac43)^2-8\cdot\frac43=3\cdot\frac{16}{9}-\frac{32}{3}=\frac{16}{3}-\frac{32}{3}=-\frac{16}{3}\Rightarrow$ buigraaklijn: $y=-\frac{16}{3}x$ (een lijn door de oorsprong).

De y-coördinaat van het buigpunt is $y=--\frac{16}{3}\cdot\frac43=-\frac{64}{9}$. (het buigpunt ligt op de grafiek van f en op de buigraaklijn)

$f_a(\frac43)=-\frac{64}{9}\Rightarrow(\frac43)^3-4\cdot(\frac43)^2+a=-\frac{64}{9}\Rightarrow a=\frac{64}{9}-\frac{64}{27}-\frac{64}{9}=-\frac{64}{27}$.

G15b $f_a'(1)=3-8=-5<0$ en $f_a''(1)=6-8=-2<0\Rightarrow$ in A is de grafiek toenemend dalend.

G16 $h(t)=\frac{250}{1+20e^{-0{,}5t}}\Rightarrow h'(t)=\frac{(1+20e^{-0{,}5t})\cdot 0-250\cdot 20e^{-0{,}5t}\cdot -0{,}5}{(1+20e^{-0{,}5t})^2}=\frac{2500e^{-0{,}5t}}{(1+20e^{-0{,}5t})^2}\Rightarrow$



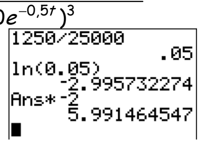
$h''(t)=\frac{(1+20e^{-0{,}5t})^2\cdot 2500e^{-0{,}5t}\cdot -0{,}5-2500e^{-0{,}5t}\cdot 2(1+20e^{-0{,}5t})\cdot 20e^{-0{,}5t}\cdot -0{,}5}{(1+20e^{-0{,}5t})^4}$

$=\frac{(1+20e^{-0{,}5t})^2\cdot -1250e^{-0{,}5t}+50000e^{-0{,}5t}\cdot e^{-0{,}5t}\cdot(1+20e^{-0{,}5t})}{(1+20e^{-0{,}5t})^4}$

$=\frac{(1+20e^{-0{,}5t})\cdot -1250e^{-0{,}5t}+50000e^{-0{,}5t}\cdot e^{-0{,}5t}}{(1+20e^{-0{,}5t})^3}=\frac{(-1250-25000e^{-0{,}5t}+50000e^{-0{,}5t})e^{-0{,}5t}}{(1+20e^{-0{,}5t})^3}=\frac{(-1250+25000e^{-0{,}5t})e^{-0{,}5t}}{(1+20e^{-0{,}5t})^3}$

De groeisnelheid is (in een buigpunt) maximaal als $h''(t)=0$ ($\Rightarrow$ teller $=0$ en een e-macht is alleen positief)

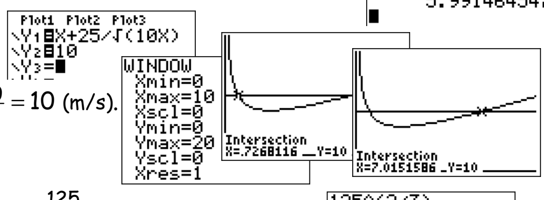
$-1250+25000e^{-0{,}5t}=0\Rightarrow e^{-0{,}5t}=\frac{1250}{25000}=0{,}05\Rightarrow -0{,}5t=\ln(0{,}05)\Rightarrow t=-2\cdot\ln(0{,}05)\approx 6$ (weken).



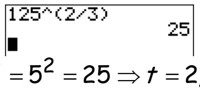
G17a $s(t)=\frac12 t^2+5\cdot\sqrt{10t}\Rightarrow s'(t)=v(t)=t+5\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{10t}}\cdot 10=t+\frac{25}{\sqrt{10t}}$.

$s(0)=0$ en $s(10)=\frac12\cdot 10^2+5\cdot\sqrt{10\cdot 10}=50+50=100\Rightarrow v_{\text{gem.}}=\frac{100}{10}=10$ (m/s).

$v(t)=v_{\text{gem.}}\Rightarrow t+\frac{25}{\sqrt{10t}}=10$ (intersect) $\Rightarrow t\approx 0{,}73\vee t\approx 7{,}02$.

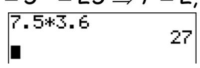


G17b $v(t)=t+\frac{25}{\sqrt{10t}}=t+25\cdot(10t)^{-\frac12}\Rightarrow v'(t)=1+25\cdot-\frac12(10t)^{-1\frac12}\cdot 10=1-\frac{125}{10t\cdot\sqrt{10t}}$.

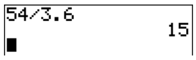


$v'(t)=0\Rightarrow 1-\frac{125}{10t\cdot\sqrt{10t}}=0\Rightarrow\frac{125}{10t\cdot\sqrt{10t}}=\frac11\Rightarrow 10t\sqrt{10t}=125\Rightarrow(10t)^{\frac32}=125\Rightarrow 10t=125^{\frac23}=(5^3)^{\frac23}=5^2=25\Rightarrow t=2{,}5$.

Minimum (zie plot) $v(2{,}5)=2{,}5+\frac{25}{\sqrt{25}}=2{,}5+\frac{25}{5}=2{,}5+5=7{,}5$ (m/s). Dit is $7{,}5\cdot 3{,}6=27$ km/uur.



G18a $a(t) = v'(t) = a \Rightarrow v(t) = at + v(0)$ met $v(0) = 15$ (54 km/uur is 15 m/s). Dus $v(t) = at + 15$.



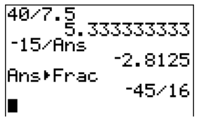
$v(t) = s'(t) = at + 15 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}at^2 + 15t + s(0)$ met $s(0) = 0$. Dus $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + 15t$.

Noem de tijd t om te remmen:

$v(t) = at + 15 = 0 \wedge s(t) = \frac{1}{2}at^2 + 15t = 40 \Rightarrow at = -15$ ❶ $\wedge$ $\frac{1}{2}at \cdot t + 15t = 40$ ❷

❶ invullen in ❷ geeft: $-7{,}5t + 15t = 40 \Rightarrow 7{,}5t = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{7{,}5} = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}$ in ❶

$t = \frac{16}{3}$ invullen in ❶ geeft dan $a \cdot \frac{16}{3} = -15 \Rightarrow a = -15 : \frac{16}{3} = -15 \times \frac{3}{16} = -\frac{45}{16} = -2\frac{13}{16} = -2{,}8125$ (m/s^2).



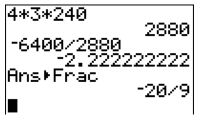
G18b Voor de auto geldt: $s_a(t) = \frac{5}{3}t + 40$ ($s(0) = 40$ en 6 km/uur is $\frac{6}{3{,}6} = \frac{60}{36} = \frac{5}{3}$ m/s).

Bij een botsing geldt: $s_w(t) = s_a(t) \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 15t = \frac{5}{3}t + 40 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 13\frac{1}{3}t - 40 = 0 \Rightarrow 3at^2 + 80t - 240 = 0$.

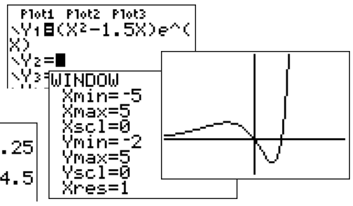
Er is geen botsing als $3at^2 + 80t - 240 = 0$ geen oplossingen heeft $\Rightarrow D < 0$.

$D = 80^2 - 4 \cdot 3a \cdot -240 < 0 \Rightarrow 6400 + 2880a < 0 \Rightarrow 2880a < -6400 \Rightarrow a < -\frac{6400}{2880} = -\frac{20}{9} \approx -2{,}22...$

Voor $a < -\frac{20}{9} \Rightarrow$ voor $a = -2{,}5$ is er geen botsing $\Rightarrow$ de wielrenner kan op tijd stoppen.



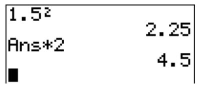
G19a $f(x) = (x^2 - 1\frac{1}{2}x)e^x \Rightarrow f'(x) = (2x - 1\frac{1}{2}) \cdot e^x + (x^2 - 1\frac{1}{2}x) \cdot e^x = (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})e^x$.



$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})e^x = 0$ (een e-macht is alleen positief) $\Rightarrow$

$x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x + 1\frac{1}{2})(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -1\frac{1}{2} \vee x = 1$.

Maximum (zie plot) $f(-1\frac{1}{2}) = ((-1\frac{1}{2})^2 - 1\frac{1}{2} \cdot -1\frac{1}{2})e^{-1\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}e^{-1\frac{1}{2}} = \frac{9}{2e \cdot \sqrt{e}}$



en minimum (zie plot) $f(1) = (1 - 1\frac{1}{2})e^1 = -\frac{1}{2}e$.

G19b $f'(x) = (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})e^x \Rightarrow f''(x) = (2x - \frac{1}{2}) \cdot e^x + (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}) \cdot e^x = (x^2 + 2\frac{1}{2}x - 1)e^x$.

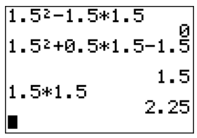
$f''(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2\frac{1}{2}x - 1)e^x = 0$ (een e-macht is alleen positief)

$x^2 + 2\frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 2 = 0$

$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25 = 16 = 41$

de x-coördinaten van de buigpunten: $x = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 - \sqrt{41}}{4} \vee x = \frac{-5 + \sqrt{41}}{4}$.

G19c $f'(0) = -1\frac{1}{2} \cdot e^0 = -1\frac{1}{2} < 0$ en $f''(0) = -1 \cdot e^0 = -1 < 0 \Rightarrow$ in O is de grafiek van f toenemend dalend.



G19d $f(1\frac{1}{2}) = ((1\frac{1}{2})^2 - 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2})e^{1\frac{1}{2}} = 0 \cdot e^{1\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow A(1\frac{1}{2}, 0)$ ligt op de grafiek van $f \Rightarrow k$ raakt in A.

$rc_k = f'(1\frac{1}{2}) = ((1\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2})e^{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2} \cdot e^{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2} \cdot e\sqrt{e}$.

k: $y = 1\frac{1}{2}e\sqrt{e}x + b = 0$ door $A(1\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow k$: $0 = 1\frac{1}{2}e\sqrt{e} \cdot 1\frac{1}{2} + b \Rightarrow b = -2\frac{1}{4}e\sqrt{e} \Rightarrow k$: $y = 1\frac{1}{2}e\sqrt{e}x - 2\frac{1}{4}e\sqrt{e}$.

$f(x) = x - \ln(x)$ (met $x > 0$ vanwege ln...) $\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Raaklijn door $A(1\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow$ de x-coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x - 1{,}5}$.

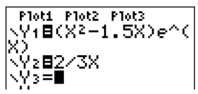
$(x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})e^x = \frac{(x^2 - 1\frac{1}{2}x)e^x}{x - 1{,}5} \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})(x - 1\frac{1}{2}) = x^2 - 1\frac{1}{2}x \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})(x - 1\frac{1}{2}) = x(x - 1\frac{1}{2}) \Rightarrow$

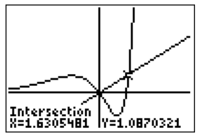
$x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = x \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x - 1\frac{1}{2})(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1\frac{1}{2}$ (voldoet niet) $\vee$ $x = -1$.

$rc_l = f'(-1) = ((-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot -1 - 1\frac{1}{2})e^{-1} = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

l: $y = -\frac{1}{e}x + b = 0$ door $A(1\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow l$: $0 = -\frac{1}{e} \cdot 1\frac{1}{2} + b \Rightarrow b = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{3}{2e} \Rightarrow l$: $y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{2e}$.

G19e Er geldt: $f'(0) \cdot rc_m = -1 \Rightarrow -1\frac{1}{2} \cdot rc_m = -1 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot rc_m = 1 \Rightarrow rc_m = \frac{2}{3}$. Dus m: $y = \frac{2}{3}x$.

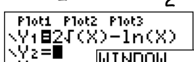


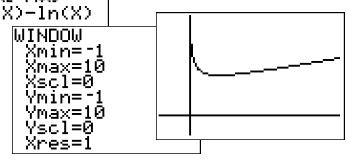


$\frac{2}{3}x = (x^2 - 1\frac{1}{2}x)e^x$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 1{,}63$ en $y \approx 1{,}09 \Rightarrow B(1{,}63; 1{,}09)$.

G20a $f_2(x) = 2 \cdot \sqrt{x} - \ln(x)$ ($x > 0$) $\Rightarrow f_2'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1} \Rightarrow f_2''(x) = -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} + x^{-2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$.

$f_2''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow x^2 = 2x\sqrt{x}$ (kwadrateren) $\Rightarrow$





$x^4 = 4x^3 \Rightarrow x^4 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ (voldoet niet) $\vee$ $x = 4$.

$x = 4 \Rightarrow f_2(4) = 2 \cdot \sqrt{4} - \ln(4) = 4 - \ln(4) \Rightarrow$ buigpunt $(4, 4 - \ln(4))$.

G20b $f_p(x) = p \cdot \sqrt{x} - \ln(x)$ ($x > 0$ en $x > 0$) ❶ $\Rightarrow f_p'(x) = p \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{p}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{x}$.

$f_p'(x) = 0 \Rightarrow \frac{p}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow px = 2\sqrt{x} \Rightarrow p = \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ invullen in ❶

$y = \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - \ln(x) = 2 - \ln(x) \Rightarrow$ de toppen liggen op de grafiek van $y = 2 - \ln(x)$.

G21a $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow f\,'(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ $\qquad g_p(x)=p\sqrt{x}$ $(x\geq 0) \Rightarrow g_p\,'(x)=p\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{p}{2\sqrt{x}}$.

Raken: $f(x)=g_p(x) \quad\wedge\quad f\,'(x)=g_p\,'(x)$

$e^{-\frac{1}{2}x}=p\sqrt{x} \quad\wedge\quad -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{p}{2\sqrt{x}}$

$\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}}=p$ ❶ $\quad\wedge\quad -e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\sqrt{x}=p$ ❷ invullen in ❶

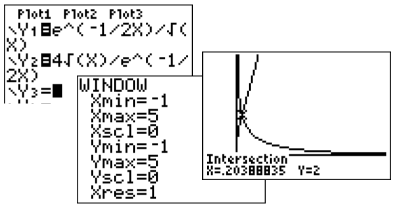
$p=\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}}=-e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=-\sqrt{x} \Rightarrow -x=1 \Rightarrow x=-1$ (voldoet niet). Dus voor geen enkele p ($\sqrt{-1}$ bestaat niet).

G21b Loodrecht snijden: $f(x)=g_p(x) \quad\wedge\quad f\,'(x)\cdot g_p\,'(x)=-1$

$e^{-\frac{1}{2}x}=p\sqrt{x} \quad\wedge\quad -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\frac{p}{2\sqrt{x}}=-1$

$\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}}=p$ ❶ $\quad\wedge\quad p=\frac{4\sqrt{x}}{e^{-\frac{1}{2}x}}$ ❷ invullen in ❶

$p=\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{x}}{e^{-\frac{1}{2}x}}$ (intersect) $\Rightarrow$ $(x\approx \ldots$ en$)$ $p=2$.



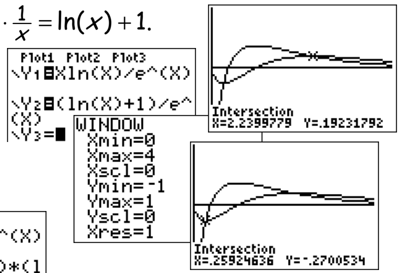
G22a $f_p(x)=pe^{x} \Rightarrow f_p\,'(x)=pe^{x} \qquad g(x)=x\ln(x)$ $(x>0) \Rightarrow g\,'(x)=1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}=\ln(x)+1$.

Raken: $f_p(x)=g(x) \quad\wedge\quad f_p\,'(x)=g\,'(x)$

$pe^{x}=x\ln(x) \quad\wedge\quad pe^{x}=\ln(x)+1$

$p=\frac{x\ln(x)}{e^{x}}$ ❶ $\quad\wedge\quad p=\frac{\ln(x)+1}{e^{x}}$ ❷ invullen in ❶

$p=\frac{x\ln(x)}{e^{x}}=\frac{\ln(x)+1}{e^{x}}$ (intersect) $\Rightarrow$ $(x\approx\ldots$ en$)$ $p\approx -0{,}27 \vee p\approx 0{,}19$.

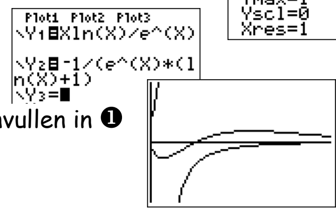


G22b Loodrecht snijden: $f_p(x)=g(x) \quad\wedge\quad f_p\,'(x).g\,'(x)=-1$

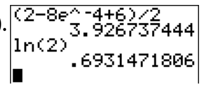
$pe^{x}=x\ln(x) \quad\wedge\quad pe^{x}\cdot(\ln(x)+1)=-1$

$p=\frac{x\ln(x)}{e^{x}}$ ❶ $\quad\wedge\quad p=\frac{-1}{e^{x}\cdot(\ln(x)+1)}$ ❷ invullen in ❶

$p=\frac{x\ln(x)}{e^{x}}=\frac{-1}{e^{x}\cdot(\ln(x)+1)}$ (intersect) $\Rightarrow$ geen oplossingen voor p.



G23a $v(0)=2-8e^{0}=2-8=-6$ (m/s) en $v(2)=2-8e^{-4}$ (m/s) $\Rightarrow a_{gem}=\frac{v(2)-v(0)}{2-0}=\frac{2-8e^{-4}+6}{2}\approx 3{,}93$ (m/s^2).

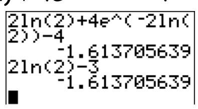


G23b Op het diepste punt is de snelheid gelijk aan $0 \Rightarrow v(t)=0$.

$2-8e^{-2t}=0 \Rightarrow -8e^{-2t}=-2 \Rightarrow e^{-2t}=\frac{1}{4} \Rightarrow -2t=\ln(\frac{1}{4}) \Rightarrow t=-\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{4})=-\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2^2})=-\frac{1}{2}\ln(2^{-2})=-\frac{1}{2}\cdot -2\ln(2)=\ln(2)$.

G23c $s=\int_0^{\ln(2)} v(t)\,dt=\int_0^{\ln(2)}(2-8e^{-2t})\,dt=\left[2t+4e^{-2t}\right]_0^{\ln(2)}=2\ln(2)+4e^{-2\ln(2)}-(0+4e^{0})=2\ln(2)+4e^{\ln(2^{-2})}-4$

$=2\ln(2)+4\cdot\frac{1}{4}-4=2\ln(2)-3\approx -1{,}61$ (m). De bal komt maximaal 161 cm diep.



G24a $f(x)=-0{,}01x^3+0{,}1x^2+x \Rightarrow f\,'(x)=-0{,}03x^2+0{,}2x+1$.

$f\,'(0)=1 \Rightarrow$ de raaklijn in O is $y=x$.

$f\,'(x)=0 \Rightarrow -0{,}03x^2+0{,}2x+1=0$ met $D=0{,}2^2-4\cdot -0{,}03\cdot 1=0{,}04+0{,}12=0{,}16 \Rightarrow \sqrt{D}=0{,}4$

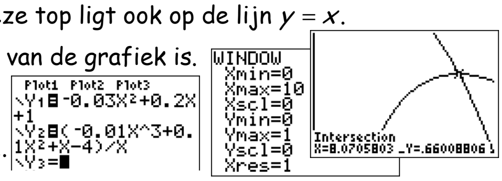
$x=\frac{-0{,}2+0{,}4}{2\cdot -0{,}03}=\frac{0{,}2}{-0{,}06}=-\frac{20}{6}=-3\frac{1}{3} \vee x=\frac{-0{,}2-0{,}4}{2\cdot -0{,}03}=\frac{-0{,}6}{-0{,}06}=\frac{60}{6}=10$.

$f(10)=-0{,}01\cdot 10^3+0{,}1\cdot 10^2+10=-10+10+10=10 \Rightarrow$ top $(10, 10)$ en deze top ligt ook op de lijn $y=x$.

G24b De lijn AP heft de grootste richtingscoëfficiënt als de lijn AP raaklijn van de grafiek is.

Dus $f\,'(x)=\frac{f(x)-4}{x-0}$

$-0{,}03x^2+0{,}2x+1=\frac{-0{,}01x^3+0{,}1x^2+x-4}{x}$ (intersect) $\Rightarrow x\approx 8{,}1 \Rightarrow x_P\approx 8{,}1$.



G25a $f(x)=g(x) \Rightarrow x^2=3\sqrt{x}$ (kwadrateren) $\Rightarrow x^4=9x \Rightarrow x=0 \vee x^3=9 \Rightarrow x=0 \vee x=\sqrt[3]{9}$ (voldoen).

$O(V)=\int_0^{\sqrt[3]{9}}(g(x)-f(x))\,dx=\int_0^{\sqrt[3]{9}}(3\sqrt{x}-x^2)\,dx=\int_0^{\sqrt[3]{9}}(3\cdot x^{\frac{1}{2}}-x^2)\,dx$

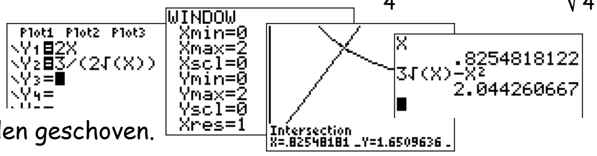
$=\left[2x^{1\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt[3]{9}}=2\cdot(\sqrt[3]{9})^{1\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot(\sqrt[3]{9})^3-(0+0)=2\cdot((3^2)^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot 9=2\cdot 3^1-3=3$.

G25b $g(a) = 2 \cdot f(a) \Rightarrow 3\sqrt{a} = 2a^2$ (kwadrateren) $\Rightarrow 9a = 4a^4 \Rightarrow a = 0 \vee 4a^3 = 9 \Rightarrow a = 0 \vee a^3 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = 0 \vee a = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$.

Dus voor $a = \sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$ (voor $a = 0$ is $A = B = C$).

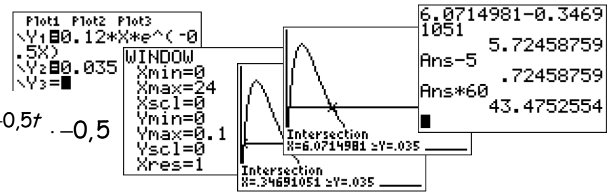
G25c $f'(x) = g'(x) \Rightarrow 2x = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x}}$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 0{,}825...$

De grafiek moet $g(\text{Ans}) - f(\text{Ans}) \approx 2{,}04$ omhoog worden geschoven.



G26a $0{,}12 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t} > 0{,}035$ (intersect) $\Rightarrow t \approx 0{,}34... \vee t \approx 6{,}07...$

Het duurt 5,72.. uur, dit is 5 uur en 43 minuten.



G26b $C(t) = 0{,}12 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t} \Rightarrow C'(t) = 0{,}12 \cdot 1 \cdot e^{-0{,}5t} + 0{,}12 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t} \cdot -0{,}5$

$= 0{,}12e^{-0{,}5t}(1 - 0{,}5t)$.

G26c De sterkste afname als $C''(t) = 0$ (in het buigpunt).

$C'(t) = 0{,}12 \cdot (1 - 0{,}5t) \cdot e^{-0{,}5t} = (0{,}12 - 0{,}06t) \cdot e^{-0{,}5t} \Rightarrow C''(t) = -0{,}06e^{-0{,}5t} + (0{,}12 - 0{,}06t) \cdot e^{-0{,}5t} \cdot -0{,}5$

$C''(t) = 0 \Rightarrow (-0{,}12 + 0{,}03t) \cdot e^{-0{,}5t} = 0$ (e-macht is alleen positief)

$-0{,}12 + 0{,}03t = 0$

$0{,}03t = 0{,}12$

$t = \frac{0{,}12}{0{,}03} = \frac{12}{3} = 4$. Dus 4 uur na het toedienen.

G26d Het hoogste maximum binnen 24 uur is op het tijdsinterval [18, 24].

$C***(t) = C(t) + C(t-6) + C(t-12) + C(t-18)$

$= 0{,}12 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t} + 0{,}12 \cdot (t-6) \cdot e^{-0{,}5t} + 0{,}12 \cdot (t-12) \cdot e^{-0{,}5t} + 0{,}12 \cdot (t-18) \cdot e^{-0{,}5t}$

De optie maximum op [18, 24] geeft $C_{max} \approx C(19{,}7) \approx 0{,}1087$ (mg/cm^3).

De concentratie komt dus niet boven de 0,11 mg/cm^3.